

UNIVERSIDADE NOVE DE JULHO - UNINOVE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA E GESTÃO
DO CONHECIMENTO - PPGI

ABIMAEI RODRIGUES SERGIO

INTERAÇÃO COMO CARACTERÍSTICA EVOLUCIONÁRIA EM UMA
POPULAÇÃO MODELADA POR AUTÔMATOS CELULARES E
ALGORITMO GENÉTICO

São Paulo
2019

ABIMAEEL RODRIGUES SERGIO

**INTERAÇÃO COMO CARACTERÍSTICA EVOLUCIONÁRIA EM UMA
POPULAÇÃO MODELADA POR AUTÔMATOS CELULARES E
ALGORITMO GENÉTICO**

Exame de defesa apresentado à Universidade Nove de Julho - UNINOVE, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Informática e Gestão do Conhecimento.

Prof. Orientador: Dr. Pedro Henrique Triguís Schimit

**São Paulo
2019**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, professor Dr. Pedro Henrique Triguis Schimit, por ter acreditado na minha capacidade de realizar esta obra, pela dedicação, pelo horário extra concedido aos finais de semana, pela ajuda, observações, ideias, discussões e, acima de tudo, pela compreensão.

Aos membros da banca examinadora, professor Dr. Pedro Henrique Triguis Schimit, professor Dr. Fabio Henrique Pereira, professor Dr. Renato José Sassi e professor Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira, pela disponibilidade e contribuições para melhoria deste trabalho.

Agradeço à minha avó e à minha mãe pelas orações e por me mostrarem o valor da educação; no futuro desejo mostrar isso aos meus filhos e netos. Agradeço à minha avó por sempre fazer parte da minha trajetória de vida, me ajudando em todos os momentos; desejo ser tão forte quanto ela para lidar com os desafios da vida cotidiana.

Aos meus amigos Aurélio Briani Matias Ramos e Fernanda Moran Menezes Pereira pelo convívio, apoio e incentivo em momentos de desespero nessa jornada.

Ao meu tio José Alberto Rodrigues, o qual foi o causador de tudo isso, à minha esposa Giselle Venâncio Marçal Sergio, à minha irmã Patrícia Ashley Rodrigues Cardoso dos Santos, e a meus amigos Douglas Trigo e Stefany Schiara, que leram esta dissertação, me auxiliando na revisão.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Informática e Gestão do Conhecimento da Universidade Nove de Julho (PPGI – UNINOVE), que mantém o alto nível de ensino nessa instituição, que me deram aulas ou que me tiraram dúvidas, me ajudando a chegar na conclusão deste trabalho. Agradeço também ao diretor professor Dr. André Felipe Henriques Librantz e ao professor Dr. Sidnei Alves de Araújo pelo incentivo e ânimo.

Aos funcionários do PPGI, em especial para o secretário Renato Borges, pelo bom trabalho prestado. À Universidade Nove de Julho que me acolheu e ofereceu esta oportunidade de obter conhecimento em sua estrutura.

A todos os meus companheiros de trabalho, em especial aos da minha última empresa, a Via Varejo, que tiveram respeito, consideração e compreensão irretocáveis sobre minha vida acadêmica.

Por fim, com amor e eterna gratidão, agradeço minha esposa Giselle Venâncio Marçal Sergio, que esteve sempre presente me dando condições indispensáveis para que eu pudesse concentrar-me nos meus estudos, por todo o apoio, tolerância e paciência, pelo carinho, generosidade e compreensão, ajuda, companheirismo e amizade, que me ajudaram na maior parte deste trabalho.

Acima de tudo e de todos eu agradeço a Deus por ter-me conduzido até aqui me ajudando em todos os momentos difíceis mostrando o caminho das soluções.

Quando a teoria de jogos foi aplicada para a evolução de populações em biologia, nasceu a teoria de jogos evolucionários. Desde sua primeira formalização, com John Maynard Smith e George R. Price, em 1973, a estratégia de um indivíduo era a peça-chave na evolução da população. Ou seja, a estratégia de um indivíduo em determinado jogo era a informação que evoluía na população. Neste trabalho, expande-se as características do indivíduo que evoluem, e além da estratégia, a quantidade de jogos iniciados pelo indivíduo, assim como o raio máximo de interação com seus vizinhos também evoluem. Os indivíduos e o processo de renovação da população são baseados em características evolutivas do algoritmo genético, sendo que estratégia, quantidade de jogos e raio de interação são consideradas como o cromossomo do indivíduo. A população é modelada por um autômato celular probabilista contínuo, e as interações entre indivíduos modeladas por dois jogos clássicos: dilema do prisioneiro e falcão-pomba. Por fim, duas regras de atualização do processo de morte-nascimento são responsáveis pela renovação da população. O objetivo do trabalho foi verificar como as características dos indivíduos evoluem junto com a população e como a taxa de mutação da população influenciou a evolução populacional. Foram realizados cinco experimentos computacionais para verificar a evolução temporal, influência da taxa de mutação sobre a quantidade de jogos e raio de movimentação, a concentração dos indivíduos em função de sua movimentação e raio de atuação, a distribuição dos indivíduos no autômato celular e o número de jogos e nível de cooperação. Observou-se que as melhores respostas estratégicas foram influenciadas pelo tipo do jogo, e dinâmica de renovação da população. Além disso, a distribuição espacial dos indivíduos também foi influenciada por esses fatores.

Palavras-chave: algoritmo genético, autômatos celulares probabilistas, dilema do prisioneiro, falcão-pomba, jogos evolucionários, jogos espaciais.

When the game theory was applied to the evolution of populations in biology, evolutionary game theory was born. Since its first formalization with John Maynard Smith and George R. Price in 1973, an individual's strategy has been the key to population evolution. That is, the strategy of an individual in a given game was the information that evolved in the population. In this paper, we expand the characteristics of the individual who evolve, and beyond the strategy, the number of games started by the individual, as well as the maximum radius of interaction with their neighbors also evolve. Individuals and the process of population renewal are based on evolutionary characteristics of the genetic algorithm, and strategy, the number of games and interaction radius are considered as the chromosome of the individual. The population is modeled by a continuous probabilistic cellular automata, and the interactions between individuals modeled by two classic games: prisoner's dilemma and hawk-dove. Finally, two rules for updating the death-birth process are responsible for population renewal. The objective of this work was to verify how the characteristics of individuals evolve along with the population and how the population mutation rate influenced the population evolution. Five computational experiments were performed to verify the temporal evolution, the influence of the mutation rate on the number of games and radius of movement, the concentration of the individuals as a function of their movement and radius of operation, the distribution of the individuals on the cellular automata and the number of games and level of cooperation. We observed that the best strategic responses were influenced by the type of game, and population renewal dynamics. In addition, the spatial distribution of individuals was also influenced by these factors.

Keywords: evolutionary games, genetic algorithm, hawk-dove, probabilistic cellular automata, prisoner's dilemma, spatial games.

Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	9
Lista de Abreviaturas	10
1 Introdução	11
1.1 Objetivo geral	14
1.2 Objetivos específicos	14
2 Conceitos básicos	15
2.1 Jogo	15
2.2 Jogos clássicos	15
2.2.1 Dilema do Prisioneiro	15
2.2.2 Falcão-pomba	17
2.3 Jogos repetidos	17
2.4 Jogos espaciais	18
2.5 Jogos evolucionários	19
2.6 Autômatos celulares	20
2.7 Algoritmo genético	22
2.8 Processo de morte-nascimento	25
3 Revisão da literatura	28
4 Metodologia	33
4.1 Modelo populacional em ACP	33
4.2 Modelo do indivíduo	33
4.3 O processo evolucionário	34
4.4 Os jogos considerados	36
5 Resultados	38
5.1 Experimentos	38
5.2 Resultados para o jogo do dilema do prisioneiro	39
5.2.1 Evolução temporal	39
5.2.2 Influência de μ sobre \bar{C} e \bar{r}	40
5.2.3 Concentração dos grupos em relação a \bar{C} e \bar{r}	41
5.2.4 Distribuição espacial no reticulado	42
5.2.5 Número de jogos e nível de cooperação	44
5.3 Resultados para o jogo do falcão-pomba	45

5.3.1	Evolução temporal	45
5.3.2	Influência de μ sobre \bar{C} e \bar{r}	46
5.3.3	Concentração dos grupos em relação a \bar{C} e \bar{r}	47
5.3.4	Distribuição espacial no reticulado	49
5.3.5	Número de jogos e nível de cooperação	50
5.4	Resumo dos resultados	51
6	Conclusões	52
	Referências Bibliográficas	54

LISTA DE FIGURAS

2.1	Vizinhança de Moore	20
2.2	Vizinhança de Von Neumann	21
2.3	AC bidimensional: mudança de estado com a primeira regra	22
2.4	AC bidimensional: mudança de estado com a segunda regra	22
2.5	AG - Cruzamento.	24
2.6	AG - Mutação.	25
2.7	Regra de atualização DB-B.	26
2.8	Regra de atualização DB-D.	27
4.1	Probabilidade de cooperação do indivíduo.	34
4.2	Fluxograma da simulação	36
5.1	Dilema do Prisioneiro: Evolução temporal.	40
5.2	Dilema do Prisioneiro: Influência de μ sobre \bar{C} e \bar{r}	41
5.3	Dilema do Prisioneiro: \bar{r} e \bar{C} para DB-B.	42
5.4	Dilema do Prisioneiro: \bar{r} e \bar{C} para DB-D.	43
5.5	Dilema do Prisioneiro: Distribuição espacial dos indivíduos no reticulado.	44
5.6	Dilema do Prisioneiro: Número de jogos e nível de cooperação.	45
5.7	Falcão-pomba: Evolução temporal.	46
5.8	Falcão-pomba: Influência de μ sobre \bar{C} e \bar{r}	47
5.9	Falcão-pomba: \bar{r} e \bar{C} para DB-B.	48
5.10	Falcão-pomba: \bar{r} e \bar{C} para DB-D.	49
5.11	Falcão-pomba: Distribuição espacial dos indivíduos no reticulado.	50
5.12	Falcão-pomba: Número de jogos e nível de cooperação.	51

LISTA DE TABELAS

2.1 Pontuação do Dilema do Prisioneiro	16
2.2 Tabela de recompensa do dilema do prisioneiro	16
2.3 Tabela de recompensa do falcão-pomba	17
2.4 Probabilidade de conexão com as camadas de raios $i=1,2,3$	21
2.5 Comparação entre elementos do AG e o sistema natural.	23
2.6 AG - Função de aptidão	24
4.1 Processo evolucionário e AG	35
4.2 Tabela de pontuação do dilema do prisioneiro	37
4.3 Tabela de pontuação do falcão-pomba	37
5.1 Probabilidade de cooperação por grupo	38

LISTA DE ABREVIATURAS

DP	Dilema do prisioneiro
FP	Falcão-pomba
DPE	Dilema do prisioneiro espacial
AC	Autômato celular
ACPC	Autômato celular probabilístico contínuo
AG	Algoritmo genético
DB	Death Birth
DB-B	Death Birth Birth
DB-D	Death Birth Death
CC	Ambos jogam cooperando
DD	Ambos jogam traindo
CD	Jogam com diferentes estratégias
DC	Jogam com diferentes estratégias

INTRODUÇÃO

Em algum momento da vida tem-se contato com certo tipo de jogo: de salão, eletrônico ou uma competição esportiva. Seja como atividade de entretenimento ou competição, são tão presentes no cotidiano que são considerados comuns. Na linguagem atual, os jogos estão também em espaços fora do entretenimento, por exemplo: jogo da política internacional e da livre concorrência, e com isso, sugere-se que exista algo em comum entre negociações internacionais, decisões estratégicas de executivos de empresas competidoras e uma partida de xadrez (FIANI, 2006).

As atividades físicas ou mentais organizadas por um sistema de regras que definem a perda ou o ganho são consideradas como jogos, e em um jogo, os agentes, ou jogadores, podem ser considerados como pessoas, governos ou líderes, que agem racionalmente, empregando sua capacidade de decisão para maximizar sua recompensa (RUBINSTEIN; OSBORNE, 1995). Quando dois indivíduos estão interagindo um com o outro em busca de uma recompensa, eles estão jogando (FIANI, 2006).

Algumas interações de indivíduos em uma sociedade também podem ser consideradas um jogo, como por exemplo respeitar as leis de trânsito, disputar uma vaga de emprego e planejar um projeto em equipe. Em muitos aspectos, a cooperação de um indivíduo frente a um grupo leva a um resultado melhor para o grupo, porém, a curto prazo, a traição às regras pré-estabelecidas levam a uma melhor recompensa. Esse tipo de situação é modelada por jogos clássicos como o dilema do prisioneiro e o falcão-pomba, que serão descritos ao longo do texto (AXELROD; HAMILTON, 1981; SMITH, 1982; NOWAK, 2012; RUBINSTEIN; OSBORNE, 1995; SZABÓ; FÁTH, 2007).

Os grupos formados pelos jogadores podem ser interpretados como populações (SIGMUND, 2011), e alocados em uma estrutura espacial (NOWAK; MAY, 1992). Uma estrutura espacial pode ser representada por uma matriz quadrada com um indivíduo alocado em cada célula da matriz, ou como um grafo com um indivíduo alocado em cada vértice (LIU; JIA; RONG, 2019). Os indivíduos dos grupos alocados na estrutura espacial interagem uns com os outros (NOWAK, 2012).

A origem da teoria dos jogos está ligada ao matemático John von Neumann. Em seu livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, John von Neumann e Oskar Morgenstern mostraram que problemas de economia podiam ser resolvidos com jogos estratégicos. Mais tarde, John Nash definiu uma noção de equilíbrio que resulta de cada jogador adotar a estratégia que é a melhor resposta às estratégias adotadas pelos demais jogadores. Estratégias são ações que um jogador pode tomar em momentos que ele terá de decidir o que fazer. A teoria dos jogos pode ser usada, por exemplo para analisar as interações entre empresas como a concorrência e a cooperação (FIANI, 2006).

Jogos que levam a população a outros perfis de estratégia dos indivíduos são chamados

de *jogos evolucionários* (PATTNI; BROOM; RYCHTÁŘ, 2017). Jogos evolucionários são uma parte da teoria dos jogos e foram formalizados por John Maynard Smith e George Price, para estudar o comportamento dos animais em situação de conflito. A estratégia do jogador é a sua ação ou modo de responder ao jogo, e o resultado do jogo mostra o quanto a estratégia do jogador foi adequada. Quando todos os jogadores de uma população estão jogando, aqueles que têm as melhores recompensas nos jogos têm maior probabilidade de ter sua estratégia transmitida para a próxima geração (SMITH, 1982; EVILSIZOR; LANCHIER et al., 2014).

As interações entre animais também começaram a ser interpretadas com base na teoria de jogos. Nos anos 1970, biólogos começaram a pesquisar as interações entre os animais, e com base nas teorias de Darwin, propuseram um jogo para modelar essas interações. É o jogo da Guerra de Desgaste (do inglês War of Attrition), em que dois animais disputam uma recompensa, e o último a desistir é o vencedor (SMITH, 1974). Na natureza, os animais competem por acasalamento, território ou alimento, e o mais forte leva a recompensa. Os mais fracos tendem a sumir da população, sendo substituídos pelos filhos dos mais aptos. Assim, tem-se a evolução natural.

Em geral, assim como no jogo da Guerra de Desgaste, a avaliação de indivíduos se dá pelo seu desempenho nessas interações modeladas por jogo. Assim, um jogador toma uma *ação* baseada em sua *estratégia*, e sua ação junto com as ações dos demais jogadores determinam as recompensas para cada um dos jogadores, que é o resultado do jogo e reflete o desempenho dos jogadores. Considere que dois animais se encontram na disputa de um território e podem atacar ou fugir da luta. A estratégia do primeiro é sempre atacar o rival, e a do segundo, atacar se o rival for menor que ele. Se o primeiro for maior, teremos o par de ações atacar e fugir, sendo que a recompensa do primeiro jogador é o território disputado e a recompensa do segundo, é zero (FIANI, 2006).

Dessa maneira, indivíduos com melhores desempenhos conseguem passar seus genes para suas proles e outros podem copiá-los para obter melhores resultados. Em uma visão macro e usando populações grandes e homogêneas, essa mudança e evolução das estratégias pode ser modelada pela dinâmica do replicador, da melhor resposta, por exemplo. Uma visão geral dessas dinâmicas pode ser encontrada em (HOFBAUER; SIGMUND, 2003).

Para modelos de populações não contínuas, ou seja, baseados em agentes, outros processos são usados para transmitir as melhores estratégias dos indivíduos. Os mais comuns são os processos de imitação, mutação, processo de Moran e *Win-Stay-Lose-Shift*. Em comum, tem-se geralmente uma população constante, ou seja, para nascer um indivíduo, outro deve morrer. Além disso, considera-se indivíduo mais apto aquele com melhor recompensa média nos jogos.

Na imitação, como o próprio nome diz, a melhor estratégia é copiada, com ou sem mutação, dependendo das características da população. No processo *Win-Stay-Lose-Shift*,

se a jogada da rodada anterior resultou em uma recompensa média esperada, o indivíduo joga a mesma estratégia na próxima rodada, mas se a jogada resultar em um nível médio abaixo do esperado, o indivíduo muda para uma nova estratégia. A nova estratégia pode ser imitada da vizinhança ou escolhida aleatoriamente do próprio conjunto de estratégias do indivíduo (SZABÓ; FÁTH, 2007).

Neste trabalho, usa-se duas dinâmicas baseadas no Processo de Moran (MORAN, 1962). Na versão original, a cada passo de tempo um indivíduo aleatório é escolhido para reproduzir, e outro indivíduo aleatório é escolhido para morrer, sendo substituído por uma cópia do primeiro indivíduo. Nos momentos de morte e/ou nascimento, pode se haver uma escolha proporcional à aptidão dos indivíduos, e essa flexibilidade foi bastante usada na *teoria de grafos evolucionários*.

A teoria de grafos evolucionários estuda como a topologia de acoplamento dos indivíduos de uma população influencia sua evolução. Os indivíduos ocupam os vértices de um grafo e as arestas representam possibilidade de interações. (MONK, 2018; SHAKARIAN; ROOS; JOHNSON, 2012; LIEBERMAN; HAUERT; NOWAK, 2005). O processo de Moran, ao ser usado nos trabalhos da área, foi expandido, alterando não apenas como um indivíduo é selecionado, mas também a sequência da avaliação individual (LIEBERMAN; HAUERT; NOWAK, 2005; OHTSUKI et al., 2006; MONK, 2018). Por exemplo, se um primeiro indivíduo é escolhido aleatoriamente para morrer e um segundo indivíduo é escolhido com uma probabilidade proporcional à sua aptidão para substituir o primeiro, tem-se uma regra de atualização *death-birth* com seleção no nascimento, ou DB-B. Quando a avaliação da aptidão é com seleção na morte, em um processo DB-D, o primeiro indivíduo é escolhido para morrer com uma probabilidade proporcional ao inverso de sua aptidão, e o segundo indivíduo é escolhido aleatoriamente para o nascimento. Um resumo das principais regras de atualização pode ser encontrada em (SHAKARIAN; ROOS; JOHNSON, 2012).

Geralmente os modelos de população têm uma estrutura estática, o que significa que os indivíduos têm um conjunto limitado de vizinhos para interagir e são forçados a jogar uma quantidade específica de jogos. Porém, em alguns estudos o conjunto de vizinhos com quem um indivíduo interage também evolui ao longo do tempo (TARNITA et al., 2009), ou tem-se populações subdivididas com diferentes atributos de interações (PATTONI; BROOM; RYCHTÁŘ, 2017).

O trabalho propõe um modelo baseado em (SCHIMIT, 2014; SCHIMIT, 2016), e expande a estratégia de um indivíduo para que suas características de interação com seus vizinhos também evoluam na população. Ao invés dos jogadores terem um número fixo de jogos por passo de tempo, a quantidade de interações e o raio máximo de interação são adicionados em seus cromossomos, ao lado das informações sobre sua estratégia no jogo considerado. Todas as características evoluem na população.

1.1 OBJETIVO GERAL

Ao se considerar a quantidade de jogos e o raio máximo de interação como características complementares da estratégia de jogo de um indivíduo, o objetivo do trabalho é verificar como essas características evoluem junto com a população, sob diferentes métodos de renovação da população, além de verificar como a mutação influencia a evolução populacional.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O objetivo geral pode ser separado nos seguintes objetivos específicos:

- Analisar a evolução da população sob diferentes métodos de renovação dos indivíduos usando os jogos clássicos dilema do prisioneiro e falcão-pomba como modelos de interação entre os indivíduos;
- Analisar a influência da taxa de mutação na evolução da população;
- Verificar quais os tipos de indivíduos permanecem na população, e como eles se distribuem na estrutura espacial;
- Por fim, avaliar o nível de cooperação na população para todos os cenários simulados.

Este trabalho está organizado conforme a seguir. No capítulo 2, são apresentados os conceitos básicos de jogos, autômatos celulares, algoritmo genético e processo morte-nascimento usado. O capítulo 3 consiste de uma breve revisão da literatura. O capítulo 4 apresenta o processo evolucionário e o modelo, com os resultados das simulações no capítulo 5. Por fim, no capítulo 6, as principais conclusões obtidas a partir deste trabalho são expostas.

CONCEITOS BÁSICOS

Nesse capítulo, os conceitos fundamentais que nortearam o desenvolvimento deste trabalho são brevemente apresentados.

2.1 JOGO

Segundo Ferreira (1999), os jogos são atividades físicas ou mentais organizadas por um sistema de regras que definem a perda ou o ganho. Já para Fiani (2006), são situações que envolvam interações entre agentes racionais que se comportam estrategicamente. Os elementos que compõem um jogo são:

- *Jogo*: modelo formal com regras pré-estabelecidas para apresentar e estudar a interação estratégica;
- *Jogador*: agente com capacidade de decisão que causa influência nos demais participantes do jogo. Rubinstein e Osborne (1995) citaram como exemplos: pessoas, governos e líderes, e Fiani (2006) citou como exemplos: empresas, sindicatos e partidos políticos;
- *Ação*: ação de um agente no momento da interação estratégica. A ação de um jogador afeta a recompensa dos demais jogadores envolvidos;
- *Racionalidade*: os indivíduos são racionais e empregam os meios mais adequados para maximizar sua recompensa, ou minimizar a perda;
- *Estratégia*: Sequência de ações ou modo de responder ao jogo. Os jogadores sabem que suas decisões terão consequências sobre os demais jogadores;
- *Recompensa*: resultado do jogo para o jogador, aquilo que é retornado após a escolha das ações dos jogadores e interação por meio do jogo.

2.2 JOGOS CLÁSSICOS

Nesta sessão serão apresentados dois jogos: o jogo do Dilema do Prisioneiro e o jogo do Falcão-Pomba. Esses jogos são dois exemplos clássicos da aplicação da teoria dos jogos.

2.2.1 DILEMA DO PRISIONEIRO

O jogo do Dilema do Prisioneiro (DP) é um jogo clássico da teoria de jogos (NOWAK; MAY, 1992), e de maneira simplificada pode ser explicado pela seguinte situação: dois

indivíduos foram pegos após cometerem um crime e foram colocados em salas separadas, sem comunicação entre eles. Declarando-se culpados, ou seja, confessando o crime, ambos pegam um ano de prisão. Se um deles declara-se culpado e o outro, inocente, o inocente fica livre e o culpado pega 5 anos de prisão. Se ambos se declaram inocentes, cada um pega 4 anos de prisão. De maneira intuitiva, a cooperação mútua, ou seja, ambos se declarando culpados, parece ser a melhor opção, mas de maneira racional, é melhor trair, ou seja, se declararem inocentes (RUBINSTEIN; OSBORNE, 1995).

Ou seja, no jogo do DP não importa o que o oponente faça, é melhor traí-lo (WANG; RUI; LIN, 2018). Por isso, as ações do jogo ficaram conhecidas como: traição (D) (*do inglês defection*) ou cooperação (C) (*do inglês cooperation*). A tabela 2.1 tem um exemplo de uma formal normal do jogo e de pontuação de recompensa para o jogo do DP. As linhas contêm as ações do indivíduo i que são C ou D , e as colunas contêm as ações do indivíduo j que também são duas C ou D . As recompensas estão no formato: (*recompensa i , recompensa j*), onde a primeira posição é a recompensa do indivíduo i , e a segunda posição é a recompensa do indivíduo j . Por exemplo, se o indivíduo i escolhe a ação D , e o indivíduo j escolhe C , o indivíduo i recebe 0 pontos e o indivíduo j recebe 5.

Tabela 2.1: Pontuação do Dilema do Prisioneiro

		Indivíduo j	
		C	D
Indivíduo i	C	-1,-1	-5,0
	D	0,-5	-4,-4

Fonte: Schimit (2016).

Note que quando o indivíduo j escolhe a ação C , a melhor resposta para o indivíduo i é jogar D . A mesma coisa acontece quando o indivíduo j escolhe D . Como a tabela é simétrica, a melhor opção para os jogadores sempre é D . A tabela 2.2 apresenta uma pontuação genérica para o jogo. Quando os jogadores cooperam entre si, recebem a recompensa R (do inglês reward). Quando suas jogadas são divergentes, o cooperador recebe a recompensa S (do inglês sucker), e o traidor recebe a recompensa T (do inglês temptation). Quando a traição é mutua, eles recebem uma punição P (do inglês punishment).

Tabela 2.2: Tabela de recompensa do dilema do prisioneiro

		Indivíduo j	
		C	D
Indivíduo i	C	R,R	S,T
	D	T,S	P,P

Fonte: Schimit (2016).

Para definir um jogo do DP, a seguinte condição deve ser satisfeita: $T > R > P > S$ (SMITH, 1982; NOWAK; MAY, 1993; WANG; RUI; LIN, 2018). Com esta sequência de recompensas, a traição é sempre a melhor escolha para qualquer que seja a escolha do

oponente, embora a cooperação seja vista como uma situação melhor para os envolvidos (SZABÓ; FÁTH, 2007).

2.2.2 FALCÃO-POMBA

O jogo do falcão-pomba (FP) (também conhecido como *Hawk-Dove*, *Snow-Drift* ou *Chicken*), foi proposto por John Maynard Smith e Price, para descrever um conflito entre animais. Os animais podem ficar na defensiva agindo como pomba, ou atacar agindo como falcão (SMITH; PRICE, 1973; SMITH, 1982). Considere a situação: dois animais se encontram e devem lutar por um bem de valor V (presa ou território, por exemplo). Cada um pode se comportar como uma pomba D (o inglês Dove) e fugir do combate, ou como um falcão H (do inglês Hawk) pagando um custo C para lutar. Nesse jogo o custo da luta é maior que o valor do recurso, ou seja $C > V$. O jogo que mostra esta situação está ilustrado na tabela 2.3. Cada animal prefere ser um Falcão se seu oponente é Pomba e Pomba se seu oponente for um Falcão (SMITH; PRICE, 1973; RUBINSTEIN; OSBORNE, 1995; SZABÓ; FÁTH, 2007).

Quando ambos indivíduos jogam D , eles dividem o valor do bem V . Quando jogam ações diferentes, o falcão leva todo o valor, e quando ambos jogam H , eles dividem a diferença entre o valor do bem e o custo da luta. A melhor estratégia para esse jogo é jogar diferente do adversário quando se considera estratégias puras, ou seja, o jogador escolhe uma determinada estratégia para jogá-la e não faz isso aleatoriamente (FIANI, 2006; SMITH, 1982; SZABÓ; FÁTH, 2007).

Tabela 2.3: Tabela de recompensa do falcão-pomba

		Indivíduo j	
		H	D
Indivíduo i	H	$(V-C)/2, (V-C)/2$	$V, 0$
	D	$0, V$	$V/2, V/2$

Fonte: Smith (1982).

2.3 JOGOS REPETIDOS

Segundo Fiani (2006), jogos repetidos são simultâneos e se repetem no decorrer do tempo. Nos jogos simultâneos os jogadores se movem ao mesmo tempo e o histórico dos jogadores influencia decisões futuras. Como exemplos de interações desse tipo, tem-se as interações entre empresas fornecedoras e compradoras, interações entre políticos e interações estratégicas entre países.

Segundo Rubinstein e Osborne (1995), em um jogo repetido pode-se averiguar a lógica da interação a longo prazo. A ideia é que um jogador levará em conta o efeito de sua ação no comportamento futuro dos outros jogadores. Se dois indivíduos jogam repetidamente

o jogo do DP, ambos os jogadores estão em melhor situação se cooperarem mutuamente. Sendo assim, se o jogo for jogado repetidamente, o resultado esperado é que ambos cooperem em cada interação. Uma traição irá terminar a cooperação, resultando em uma perda que supera os ganhos a curto prazo.

Um exemplo de jogos repetidos foi o estudo feito por Robert Axelrod em 1980 (AXELROD, 1980a; AXELROD, 1980b), na forma de dois torneios de estratégias para o jogo do DP. Tanto para o primeiro, quanto para o segundo torneio, pesquisadores de todo o mundo enviaram suas estratégias para serem jogadas em pares, enfrentando todas as outras. Houve diferentes estratégias, e cada uma conhecia o histórico da outra com quem havia interagido; cada par de estratégias jogou 200 vezes.

No primeiro torneio a estratégia submetida por Anatol Rapoport, chamada *Tit-For-Tat* (olho-por-olho), ganhou com uma média de 504 pontos. O segundo lugar foi para uma estratégia chamada TIDEMAN E CHIERUZZI (500 pontos) e terceiro lugar para NYDEGGER (486 pontos). A estratégia *Tit-For-Tat* começava cooperando e continuava cooperando enquanto o seu oponente também o fazia, mas traía quando o oponente traía e só voltava a cooperar quando o seu oponente voltava. As ações eram duas, cooperar ou trair.

A estratégia vencedora tinha como característica ser gentil e perdoar. Ser gentil significava não ser a primeira a trair, e perdoar era cooperar após ser traída. Ao final do primeiro torneio, foi publicado o resultado de forma pública para os demais pesquisadores. Ao anunciar o segundo torneio, os pesquisadores tinham o resultado do primeiro e com isso puderam explorar as estratégias usadas anteriormente, mas ainda assim, no segundo torneio a estratégia *Tit-For-Tat* venceu novamente. Quando outras estratégias que também cooperavam se encontravam com *Tit-For-Tat*, ambas estratégias começavam a melhorar a pontuação juntas. Mas quando as estratégias de traição se encontravam com *Tit-For-Tat*, começavam a não conseguir somar pontos até que voltassem a cooperar. Então Axelrod e Hamilton mostraram que em jogos repetidos, características de sempre cooperar com quem coopera, trair quem trai e perdoar quem mudar de estratégia, gerava a melhor pontuação.

2.4 JOGOS ESPACIAIS

Quando os jogadores são distribuídos pelo espaço e interagem com sua vizinhança, tem-se um jogo espacial, como apresentado inicialmente em (NOWAK; MAY, 1992). No artigo de Nowak e May (1992), somente dois tipos de jogadores foram considerados: aqueles que sempre cooperam e os que sempre traem.

Foram exploradas as consequências de se colocar esses dois tipos de jogadores juntos, em uma matriz quadrada bidimensional $n \times n$, com um indivíduo por célula, jogando o Dilema do Prisioneiro Espacial (DPE) com seus vizinhos mais próximos. A cada passo

de tempo, o lugar na matriz era ocupado pelo seu proprietário original ou por um dos vizinhos, dependendo de quem obteve a maior recompensa.

Com essa pesquisa, Nowak e May (1992) mostraram que a cooperação pode surgir em um grupo de jogadores que competem não tendo memória dos jogos anteriores e jogando o jogo do DPE em uma estrutura espacial. Como resultado do uso da estrutura espacial, a cooperação surgiu e se manteve estável, sendo que esse efeito ocorreu devido à reciprocidade espacial, ou seja, os cooperadores se juntaram em grupos, assim como os traidores, e por conta desses agrupamentos, os indivíduos cooperadores jogavam com seu vizinho mais próximo, que também era um cooperador, e eles então sobreviveram por estarem em um agrupamento onde a cooperação era mútua.

O DPE foi usado por Matsumoto et al. (2017), que propuseram o conceito de medição dos grupos formados por cooperadores. Os autores definiram uma nova noção de grupos neste estudo. Para tal, definiram um grupo mínimo de cooperadores como quatro células de um quadrado (2×2). O método proposto mede o grau de cooperação dos grupos de cooperadores na matriz quadrada.

O DPE também tem sido estudado em outros tipos de estruturas de rede, como redes hexagonais e redes sem escala, pois a topologia da estrutura exerce influência na dinâmica. Essas redes empregadas em jogos espaciais têm uma característica importante que é a formação de grupos de jogadores que cooperam e se beneficiam um ao outro (MASUDA; AIHARA, 2003; LI et al., 2009; HAUERT; DOEBELI, 2004; WU et al., 2014).

2.5 JOGOS EVOLUCIONÁRIOS

A base da teoria de jogos evolucionários foi desenvolvida por John Maynard Smith, em 1973, visando entender como populações de animais irracionais chegavam a comportamentos complexos de cooperação. Ele começou a analisar a dinâmica de interação de populações ao invés da interação entre dois jogadores. Nos jogos evolucionários as análises são feitas em populações inteiras interagindo (SIGMUND, 2011; SMITH; PRICE, 1973). A teoria dos jogos evolucionários, é uma maneira de modelar a evolução e o comportamento dos indivíduos dentro das populações (PATTONI; BROOM; RYCHTÁŘ, 2017).

A melhor estratégia quando um jogador tem um único oponente é diferente da melhor estratégia quando este mesmo jogador enfrenta uma população heterogênea (SMITH, 1982). No jogo do DP, a traição é a melhor opção para um jogo, mas em uma população, se todos os indivíduos traírem um ao outro, a população pode se autodestruir. Portanto, a melhor estratégia muda para que os indivíduos maximizem sua recompensa (NOWAK, 2012).

2.6 AUTÔMATOS CELULARES

Em 1940, Stanislaw Ulam e John Von Neumann introduziram os Autômatos Celulares (ACs) para modelar a auto reprodução biológica. Mas os ACs também foram usados para analisar, especialmente, como uma doença se comporta (SCHIMIT; MONTEIRO, 2009), para descrever um modelo que representasse o crescimento cancerígeno (SMOLLE; STETTNER, 1993; KANSAL et al., 2000), na geração de números pseudoaleatórios (TOMASSINI; SIPPER; PERRENOUD, 2000), para fazer criptografia (MACHICAO; MARCO; BRUNO, 2012), simular o tráfego (BENJAMIN; JOHNSON; HUI, 1996) e para calcular números primos (JOHNSTON, 2009).

Segundo Sarkar (2000) e Wolfram (1994), um autômato celular pode ser definido pela sua estrutura dimensional, vizinhança, estados e regras de transição:

- *Estrutura dimensional*: geralmente um reticulado bidimensional, formando uma matriz $m \times n$ organizada em m linhas e n colunas, com uma célula em cada posição (UGUZ et al., 2016);
- *Vizinhança*: num autômato celular de duas dimensões, uma vizinhança pode consistir de quatro ou oito células adjacentes em uma estrutura quadrada conhecida como vizinhança de Von Neumann e vizinhança de Moore (HOGEWEG, 1988). A vizinhança de Moore de raio unitário, figura 2.1, é constituída por uma célula central com 8 vizinhas. A vizinhança de Von Neumann é composta por 4 células vizinhas à central (a célula acima, abaixo, à direita e à esquerda), e está ilustrada na figura 2.2;
- *Estados*: as células de um AC assumem um estado por passo de tempo. Os ACs discretos tem um número finito de estados para as células, já os ACs contínuos tem infinitos estados (WOLFRAM, 2002);
- *Regras de transição*: determinam que o estado de uma célula no instante $t+1$ é dado em função do estado da própria célula e das células de sua vizinhança no instante t .

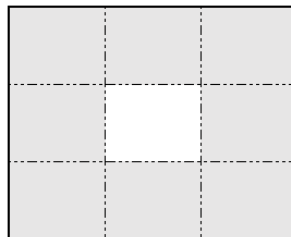


Figura 2.1: *Vizinhança de Moore*
Fonte: Uguz et al. (2016).

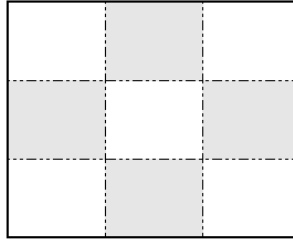


Figura 2.2: *Vizinhança de Von Neumann*
 Fonte: Uguz et al. (2016).

Outro tipo de vizinhança, baseada na vizinhança de Moore, foi apresentada por Schimit e Monteiro (2009). Um indivíduo tem como vizinhança uma área no reticulado de raio r com o indivíduo no centro, ou seja, tem-se um quadrado de lado $2r + 1$ como a área de sua vizinhança. Vizinhos que estão a uma distância 1 do indivíduo central da matriz, estão na primeira camada da vizinhança, com $l = 1$, vizinhos a uma distância 2, tem-se $l = 2$ e assim por diante. Nesse modelo, conexões entre vizinhos mais próximos são mais prováveis de acontecer. A probabilidade de um indivíduo interagir com a camada l obedece a seguinte expressão:

$$q_i = \frac{2(r_i + 1 - l)}{r_i(r_i + 1)} \tag{2.1}$$

sendo q_i a probabilidade de se estabelecer uma conexão entre o indivíduo central e um outro da camada l ($l = 1, \dots, r$).

A tabela 2.4 exemplifica a probabilidade de conexão com as camadas no caso em que $r = 3$. Nesse caso, uma média de 50% das conexões entre as células são feitas na camada 1, 33% na camada 2 e 17% são feitas com as células da camada 3 (SCHIMIT; MONTEIRO, 2009). Essa vizinhança será a usada neste trabalho.

Tabela 2.4: *Probabilidade de conexão com as camadas de raios $i=1,2,3$*

r=3	
camada	probabilidade
1	1/2
2	1/3
3	1/6

Fonte: Schimit e Monteiro (2009).

Em 1960, o matemático John Horton Conway propôs o *Jogo da Vida*. Foi definido com uma estrutura bidimensional, vizinhança de Moore, dois estados (vivo e morto) e as seguintes regras (WOLFRAM, 1994; UGUZ et al., 2016):

1. Se a célula estiver viva com menos de duas células vizinhas vivas, ela morre;
2. Se a célula estiver morta com exatamente três células vizinhas vivas, ela se torna viva;

3. Se a célula estiver viva com duas ou três células vizinhas vivas, ela permanece viva;
4. Se a célula estiver viva com quatro ou mais células vizinhas vivas, ela morre.

A figura 2.3 contém um exemplo de evolução temporal do jogo da vida, partindo do instante $t = 0$, até o instante $t = 1$. A célula em preto representa uma célula viva e seguindo a primeira regra do jogo da vida, ela morre no instante seguinte.

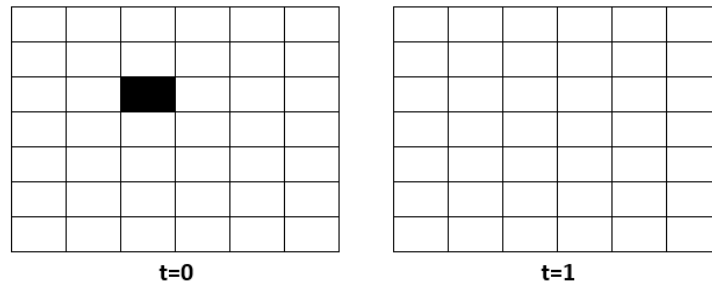


Figura 2.3: *AC bidimensional: mudança de estado com a primeira regra*
 Fonte: elaboração própria.

Já na figura 2.4, ilustra a segunda regra do jogo da vida apresentado. Nesta figura, quando $t = 0$, três células estão pintadas de preto, sendo assim estão vivas, e quando $t = 1$ uma nova célula, que estava morta, se torna viva.

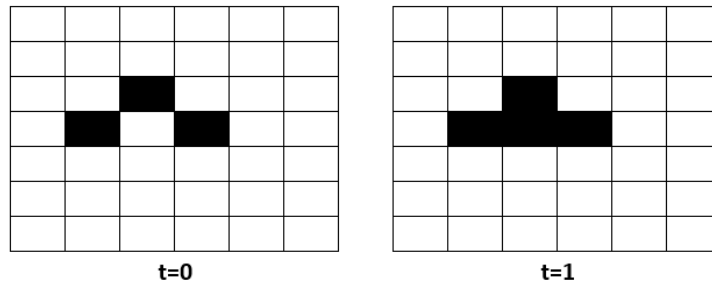


Figura 2.4: *AC bidimensional: mudança de estado com a segunda regra*
 Fonte: elaboração própria.

2.7 ALGORITMO GENÉTICO

A partir do princípio Darwiniano de reprodução e sobrevivência dos mais aptos, John Henry Holland propôs o Algoritmo Genético (AG), que simula a genética e a evolução das espécies para maximizar ou minimizar uma função (GOLDBERG, 1989). O AG é um método de busca probabilístico de soluções, onde as soluções mais aptas vivem mais e têm maior probabilidade de se reproduzirem, e seus filhos herdam seu código genético que permanece nas próximas gerações (HOLLAND, 1992).

Como o AG se inspira em um processo biológico, a terminologia usada é uma simplificação dos termos biológicos. Na Tabela 2.5 há uma comparação entre o AG e o sistema natural que o motivou.

Tabela 2.5: *Comparação entre elementos do AG e o sistema natural.*

Natural	AG
Cromossomo	Representação de uma solução: palavra binária, vetor, etc
Gene	Característica do problema; uma variável
Alelo	Valor da característica
Fenótipo	Solução decodificada
População	Conjunto de soluções candidatas
Indivíduo	Candidato a solução de um problema

Fonte: Goldberg (1989).

De acordo com (GOLDBERG, 1989; MITCHELL, 1995; HAUPT; HAUPT, 2004), os componentes básicos do AG são:

- *Função de aptidão*: função que o algoritmo tenta otimizar. Representa o problema a ser solucionado e dá a cada indivíduo da população uma medida de aptidão;
- *Cromossomo*: valor numérico ou valores que representam uma solução candidata para o problema que o AG está tentando resolver;
- *Seleção*: seleciona alguns dos cromossomos para reprodução. Quanto mais apto for um cromossomo, maior a probabilidade de ser selecionado;
- *Cruzamento*: troca uma subsequência de dois dos cromossomos escolhidos para criar dois descendentes para a próxima geração;
- *Mutação*: os cromossomos da nova geração terão seus genes trocados ou mudados aleatoriamente.

O AG começa com uma geração inicial (população inicial) de cromossomos gerados aleatoriamente, analisa quais são os melhores cromossomos pela sua aptidão e os recombina para criar uma nova geração da população. Os cromossomos dos pais são selecionados e recombinados, formando o cromossomo de um filho.

Este processo é repetido até que um critério de parada predefinido seja atingido. Como a seleção dos melhores pais se reflete nos filhos, as próximas gerações são melhores que as anteriores (HOLLAND, 1992). A substituição de uma população completa pode ser como segue (MCCALL, 2005):

1. Randomicamente gera uma população inicial com P cromossomos;
2. Calcula a aptidão de cada cromossomo na população;
3. Repete os seguintes passos até P cromossomos serem criados:

- (a) Seleciona dois cromossomos mais aptos na população inicial
 - (b) Aplica o cruzamento, e obtém um cromossomo filho
 - (c) Aplica a mutação no cromossomo filho
 - (d) Adiciona o filho na população sucessora;
4. Troca a população inicial pela população sucessora;
 5. Se o critério de parada não foi atingido, volta para o passo 2.

A seleção de quais cromossomos irão reproduzir, é por meio de uma função de aptidão, que deve representar o problema a ser solucionado. Esta função dá a cada cromossomo da população uma medida de aptidão que guia o processo que busca os mais aptos da população. A tabela 2.6, apresenta quatro cromossomos com seus valores em decimal sendo avaliados pela função de aptidão $f(x) = x^2$ (GOLDBERG, 1989).

Tabela 2.6: *AG - Função de aptidão*

Indivíduo	Cromossomo	x	$f(x)$
Cromossomo P_1	1 0 1 0 0 0 1 0 1 0	650	422500
Cromossomo P_2	0 1 1 0 0 1 0 0 1 1	403	162409
Cromossomo P_3	0 1 1 0 0 1 0 0 0 0	400	160000
Cromossomo P_4	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0	128	16384

Os mais aptos são escolhidos para cruzarem e gerar novos cromossomos na população (MCCALL, 2005). O cruzamento ocorre entre dois cromossomos selecionados, como ilustrado na figura 2.5, onde o filho (F_1) obteve metade dos genes de cada pai (P_i).

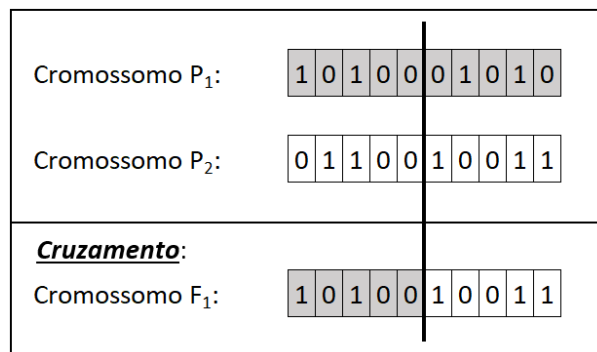


Figura 2.5: *AG - Cruzamento.*

Fonte: Goldberg (1989)

Na figura 2.6, ilustra-se a mutação aleatória com o novo cromossomo tendo seu gene trocado. A mutação introduz uma modificação aleatória no cromossomo do novo indivíduo, permitindo novas soluções.

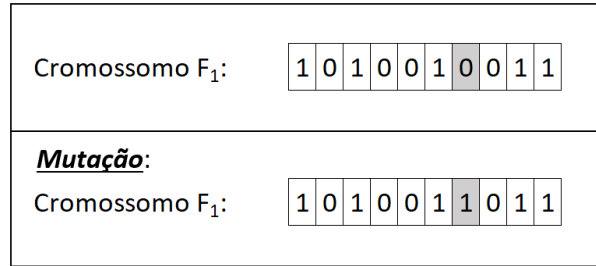


Figura 2.6: *AG - Mutação.*
 Fonte: Goldberg (1989)

2.8 PROCESSO DE MORTE-NASCIMENTO

Para que a população evolua, é necessário que os indivíduos troquem de estratégia buscando melhorar suas recompensas. Além de processos em que os indivíduos somente mudam de estratégia, como por exemplo a imitação e o Win-Stay-Lose-Shift (SZABÓ; FÁTH, 2007), há processos de renovação da população, em que a mudança de estratégia está associada à morte seguida por um nascimento. Moran (1958) propôs um modelo estocástico em que a cada passo de tempo um indivíduo da população é selecionado aleatoriamente para reproduzir, e um segundo indivíduo é selecionado aleatoriamente para morrer, sendo substituído por um clone do primeiro indivíduo selecionado (SHAKARIAN; ROOS; JOHNSON, 2012; MONK, 2018).

Com indivíduos alocados nos nós de um grafo com arestas representando interações entre eles, Lieberman, Hauert e Nowak (2005) propuseram um modelo em que a cada passo de tempo um indivíduo era escolhido para reproduzir com probabilidade proporcional à sua aptidão. Para manter a população constante, outro era escolhido aleatoriamente para morrer. Nesse trabalho surgiu o processo de nascimento-morte com avaliação de aptidão no nascimento (SHAKARIAN; ROOS; JOHNSON, 2012).

É possível escolher os melhores indivíduos para reproduzir no momento do nascimento, ou escolher os piores para morrer no momento da morte. Para tal se obedece às regras de atualização morte-nascimento com a seleção no nascimento (*DB-B*) ou morte-nascimento com a seleção na morte (*DB-D*). A letra adicional após a sigla *DB*, representa o momento em que a aptidão será avaliada, ou seja, se é no momento do nascimento *B* ou no momento da morte *D* (SHAKARIAN; ROOS; JOHNSON, 2012).

Em seu trabalho, Masuda (2009) considerou uma população de indivíduos haploides, que se reproduzem assexuadamente. Segundo Masuda (2009), as regras de atualização podem ser descritas da seguinte maneira:

- **DB-B:** um indivíduo é selecionado aleatoriamente para morrer. Um de seus vizinhos é selecionado pela sua aptidão para reproduzir.
- **DB-D:** um indivíduo é selecionado pela sua aptidão, para morrer. Um de seus

vizinhos é selecionados aleatoriamente para reproduzir.

A diferença entre as duas regras de atualização, é que na DB-B a morte é *aleatória*, na DB-D a morte é pela seleção do pior indivíduo, ou seja, *pior aptidão*. E na DB-B a seleção do pai para reproduzir é pela *melhor aptidão*, do melhor indivíduo, na DB-D a seleção do pai é *aleatória*. O indivíduo escolhido para ser pai, permanece na população.

A figura 2.7 ilustra a regra de atualização DB-B, com a população inicial haploide, homogênea e de tamanho constante. E dentre esta população um indivíduo é escolhido *aleatoriamente* para morrer, e em seguida, um outro indivíduo é selecionado para reprodução *por sua aptidão*, ou seja o melhor é escolhido para ser pai. O indivíduo escolhido para morrer é então substituído pelo novo indivíduo recém-nascido.

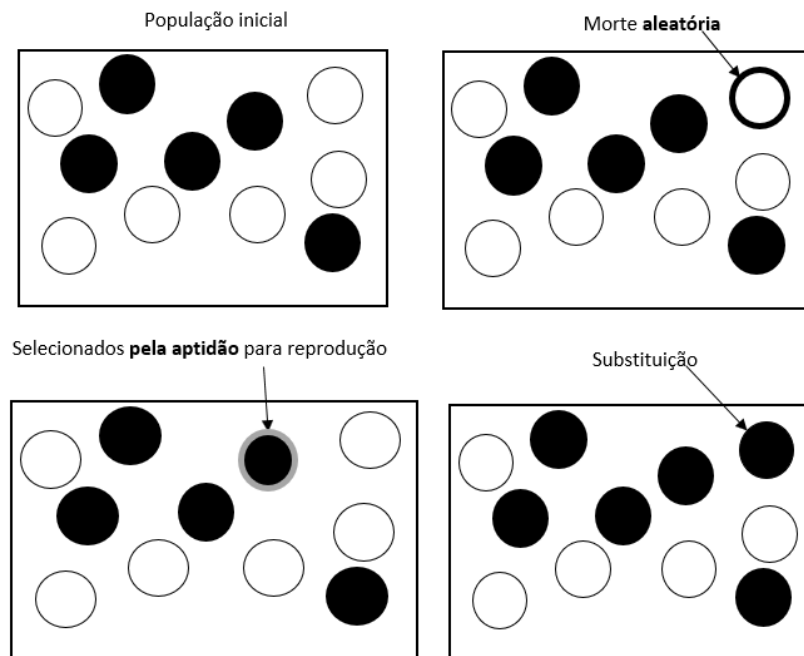


Figura 2.7: Regra de atualização DB-B.

Fonte: Lieberman, Hauert e Nowak (2005).

A figura 2.8, ilustra a regra de atualização DB-D também com o uma população inicial haploide, homogênea e de tamanho fixo, e nessa população um indivíduo é selecionado para morrer *por sua aptidão*, ou seja o pior, ou menos apto, morrerá. Em seguida, um indivíduo é escolhido *aleatoriamente* para reprodução. O indivíduo selecionado para morrer é então substituído pelo recém-nascido.

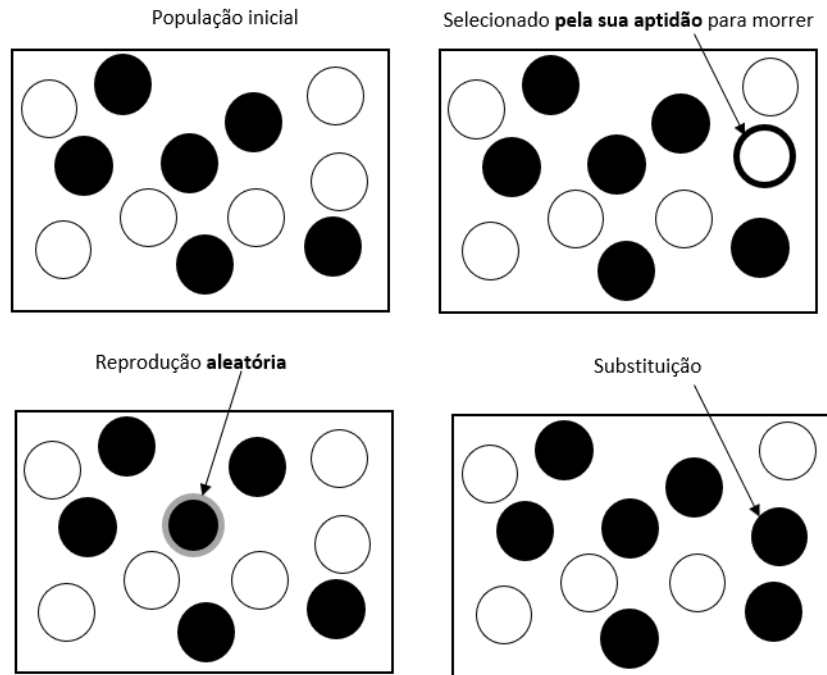


Figura 2.8: Regra de atualização DB-D.

Fonte: Lieberman, Hauert e Nowak (2005).

A regra de atualização DB-B, é equivalente ao modelo proposto por Nakamaru, Nogami e Iwasa (1998), e a regra de morte-nascimento usada para jogos evolucionários em grafos não direcionados em (OHTSUKI et al., 2006; OHTSUKI; NOWAK, 2006). Os estudos numéricos de reciprocidade espacial (NOWAK; MAY, 1992) e reciprocidade de rede (SANTOS; PACHECO, 2005), também são baseados nesta regra de atualização. A regra de atualização DB-D, é equivalente ao modelo proposto por Nakamaru, Matsuda e Iwasa (1997) e ao modelo definido por Antal, Redner e Sood (2006) e Sood, Antal e Redner (2008).

REVISÃO DA LITERATURA

Nesse capítulo é apresentada uma revisão da literatura. A área de jogos evolucionários acabou se tornando uma área tão grande como a própria teoria de jogos, e por isso, os artigos mais próximos ao trabalho serão apresentados e comentados.

Nowak e May (1992) estudaram padrões espaciais quando os indivíduos estão dispostos em uma estrutura quadrada modelada por um autômato celular jogando o jogo do DP. Eles não levaram em consideração o histórico ou memória dos jogos anteriores ocorridos entre dois jogadores, usaram o dilema do prisioneiro e falcão-pomba sem estratégias elaboradas e, para o jogo do DP, consideraram somente dois tipos de jogadores, aqueles que sempre cooperam e aqueles que sempre traem. No caso do FP, testaram os padrões de se introduzir um falcão em meio de uma matriz de pombas e vice-versa. Exploraram as consequências de se colocar esses jogadores em uma estrutura quadrada bidimensional com um jogador por célula. Em cada passo de tempo, um indivíduo interagia com seu vizinho mais próximo, e o vizinho que obtinha mais pontos ocupava o lugar na matriz do vizinho que fez menos pontos.

Em (NOWAK; MAY, 1993), foi usado um parâmetro contínuo que representava a vantagem dos traidores sobre os cooperadores e este foi variando durante as simulações e os resultados dessas variações foram explorados. Usaram autômatos celulares determinísticos, ou seja, as regras de atualização definiam o próximo estado das células baseado nas células vizinhas. Usou-se uma vizinhança semelhante à vizinhança de Moore. Uma matriz $n \times n$ toroidal foi usada para evitar os efeitos de borda. Os cooperadores se agruparam no reticulado assim como os traidores também se juntaram. Descobriram que a movimentação local pode ajudar populações hospedeiras e parasitoides a permanecerem juntas.

Crowley et al. (1996) desenvolveram um algoritmo baseado no AG, e fizeram simulações com o jogo do DP para estudar a evolução da cooperação em populações de indivíduos interagindo. Em seu modelo a população tinha um tamanho fixo, cada sequência de evolução teve duração de 1000 gerações, a reprodução era por meio de dois pais e no genoma dos indivíduos estava sua ação cooperar ou trair. O algoritmo usado criava uma população de jogadores, que se uniam em pares para jogar o DP. Ao final de cada partida, cada jogador recebia os pontos adquiridos no jogo e os jogadores com mais pontos eram selecionados para reproduzir, ou seja, para serem pais. Quando os filhos desses jogadores nasciam, eles ocupavam o lugar dos jogadores com baixa pontuação, sendo que os jogadores com baixa pontuação eram eliminados da população.

Em (LIEBERMAN; HAUERT; NOWAK, 2005), foi generalizada a estrutura de uma população organizando os indivíduos em um grafo ponderado, onde seus vértices representam um indivíduo, as arestas ponderadas indicam as taxas de reprodução que regem a

frequência com que os indivíduos geram um filho nos vértices adjacentes. A população é homogênea e foi definida pelo processo de Moran (MORAN, 1958). As estruturas espaciais usadas foram grafos com os vértices conectados a seus vizinhos mais próximos. Eles estudaram a probabilidade de um indivíduo mutante gerar uma linhagem que assumisse toda a população. Então foi explorada a evolução de redes aleatórias, e foram definidos grafos com comportamento de fixação idêntico ao de uma população homogênea. Foi observado que alguns grafos atuam como supressores e outros como amplificadores de seleção, e que se pode encontrar grafos que garantem a fixação de um mutante na população. A seleção dependente de frequência foi estudada e o resultado dos jogos evolucionários podem depender da estrutura do grafo.

Em (AXELROD; AXELROD; PIENTA, 2006), foi estudada a evolução da cooperação entre células cancerígenas. Levantaram a hipótese de que os clones de células cancerígenas evoluem independentemente uns dos outros e adquirem todos os traços genéticos ou características necessárias para formar um tumor maligno. As células tumorais foram consideradas como jogadores, cujas interações ajudam a determinar sua aptidão darwiniana. Evidenciaram que as células tumorais superam certas defesas do hospedeiro. Contribuíram ao levantar a possibilidade de que duas células próximas possam se proteger de um conjunto de defesas do hospedeiro. A cooperação levantou novas questões e tiveram implicações na compreensão e na concepção de novos experimentos e no desenvolvimento de novas abordagens terapêuticas.

A evolução da cooperação tem sido usada em diversas áreas e tem sido tema de estudos em áreas como biologia, economia e psicologia, o que confirma sua importância. Foi usada para estudar a coevolução do altruísmo e da punição para casos de agentes que não cooperam com a população (NAKAMARUA; IWASA, 2006), e na evolução do altruísmo em agentes móveis, ou seja em indivíduos que se movimentam na estrutura espacial para, por exemplo, se afastar da possibilidade de interagir novamente com um indivíduo traidor (CHEN et al., 2011; JIA; MA, 2013), e também foi estudada em ambientes com características diversas no qual o indivíduo tem liberdade para escolher, voluntariamente, se participa do jogo do dilema do prisioneiro (GUO et al., 2017).

Szabó e Fáth (2007) fizeram uma revisão, ou tutorial que fornece uma visão geral, dando uma base teórica no campo da teoria dos jogos evolucionários, desde as definições mais básicas até os resultados de suma importância. Forneceram uma explicação básica dos jogos: falcão-pomba, guerra dos sexos, contrato social, jogo dos bens públicos, jogo do ultimato e outros. O foco da revisão foi avaliar como a estrutura onde ocorrem as interações pode modificar os padrões comportamentais que surgem nos jogos evolucionários a longo prazo.

Segundo Tarnita et al. (2009), a dinâmica evolucionária e o resultado de um processo evolucionário em uma população, são afetados pela estrutura populacional. Em seu artigo, criaram um método para estudar a dinâmica da estrutura populacional, a teoria dos

conjuntos evolucionários, onde os indivíduos da população são distribuídos em conjuntos, e interagem com outros que estão no mesmo conjunto e podem ter vários conjuntos em comum. Os indivíduos interagem jogando o jogo do DP, e a recompensa do jogo é atribuída aos indivíduos como sendo a sua aptidão. A cada passo de tempo, a dinâmica evolucionária muda os membros da população e sua estratégia, sendo assim, a estrutura da população é consequência da dinâmica evolucionária escolhida. Criaram uma abordagem matemática para estudar jogos evolucionários com condições para os cooperadores serem selecionados.

Masuda (2009) trata de uma população haploide, onde os indivíduos competem para reproduzir e sobreviver e os mais aptos têm mais chances de propagar seus clones na população. Quanto maior for a probabilidade de um mutante se fixar na população, maior será a probabilidade de se propagar. Quanto mais apto for o mutante, maior será sua probabilidade de se fixar na população e de ser selecionado para permanecer. A pressão para ser selecionado, ou pressão de seleção, depende da estrutura da rede e da regra da reprodução. Neste trabalho, com grafos direcionados, foi examinado como a pressão de seleção é afetada pela direcionalidade das interações sob várias regras de atualização. Essa pressão de seleção pode ser amplificada por alguns tipos de redes e pela regra da reprodução, ou seja, um tipo apto tem maior probabilidade de se fixar na população do que um menos apto. Concluíram que a direcionalidade reduz a pressão de seleção para diferentes redes e regras de atualização, e que as regras de atualização nas quais os eventos de morte precedem os eventos de reprodução diminuem significativamente a pressão de seleção.

Em (SHAKARIAN; ROOS; JOHNSON, 2012), os autores retrataram a teoria dos grafos evolucionários, a qual foi exposta por Lieberman, Hauert e Nowak (2005), e generaliza o clássico processo de Moran (MORAN, 1958). Com o foco na capacidade de um gene mutante dominar uma população finita e estruturada, fizeram uma revisão da estrutura da teoria dos grafos evolucionários, analisaram o cálculo da probabilidade de fixação, ou seja, a probabilidade do mutante subjugar uma população. Falaram da dinâmica populacional morte-nascimento e das regras de atualização.

O modelo apresentado por Schimit (2014), utiliza AG e teoria dos jogos evolucionários com o jogo do *DP* para modelar uma população de indivíduos competindo entre si. A estratégia dos indivíduos está em seu genótipo, a qual é sua probabilidade de cooperação. Os indivíduos mais aptos geram filhos, e seu sucesso depende de sua estratégia. Os recém-nascidos serão filhos dos mais aptos em uma determinada região. Quatro funções de aptidão foram utilizadas e sua influência foi analisada na evolução da cooperação populacional. Os indivíduos vivem em uma estrutura matricial modelada por autômatos celulares probabilistas e jogam com seus vizinhos.

Schimit, Santos e Soares (2015a) propuseram um modelo no qual os indivíduos da população competem com uma estratégia no jogo do DP com seus vizinhos em um autômato celular. Cada célula representa um indivíduo que tem uma estratégia e joga com seus vizi-

nhos. No estudo apresentado os indivíduos competem com diferentes estratégias em cada jogada. Dezesseis estratégias foram usadas na simulação. A estratégia *Tit-For-Tat* não foi bem sucedida em nenhuma das funções de aptidão.

Em (SCHIMIT, 2016), foi analisado numericamente como parâmetros do jogo do dilema do prisioneiro e AG influenciam na evolução da cooperação em uma população, e estuda porque a cooperação cresce em situações onde a traição dá um melhor retorno. Os processos do AG foram usados na população para selecionar os indivíduos mais aptos e criar as novas gerações. Foram usadas onze funções de aptidão para avaliar os indivíduos da população. As interações entre os indivíduos foram modeladas pelo dilema do prisioneiro, e no cromossomo dos indivíduos estava contida sua probabilidade de cooperação. A população foi modelada por autômatos celulares e equação diferencial ordinária e uma comparação entre os resultados foi realizada.

Em (PATTNI; BROOM; RYCHTÁŘ, 2017), foi utilizada uma estrutura de grafos, onde as regras da dinâmica evolucionária tiveram efeito na evolução da população. Considerou-se que cada vértice do grafo continha um indivíduo residente e eles interagem uns com os outros quando se encontravam no mesmo vértice. As visitas aos vértices ocorriam com uma certa probabilidade, os indivíduos se moviam independentemente uns dos outros e do histórico populacional. Concluíram que a cooperação pode ocorrer quando existe para uma estrutura populacional, significando que os indivíduos que jogam cooperando têm maior probabilidade de interagir entre si e essa situação os torna resistentes à exploração dos traidores nas estruturas heterogêneas, permitindo que grupos de cooperadores se formem. A cooperação ocorreu quando a estrutura e a dinâmica agiram juntas em favor dos cooperadores. Foi usado o jogo dos bens públicos (do inglês public goods game), o qual pode ser explicado pela seguinte situação: uma certa quantidade de jogadores têm um fundo comum para investir, e cada jogador, individualmente e secretamente, decide quanto investir. O jogador também pode decidir participar como um membro do fundo comum e não investir nada, e os lucros são divididos entre todos (CHEN; CHEN; WANG, 2019).

Laruelle, Rocha e Escobedo (2018) analisaram os resultados do jogo do FP em uma população e os padrões de comportamento puderam ser reproduzidos ao se usar as regras do jogo. Foi dada especial atenção para os casos nos quais todos os indivíduos da população eram fenotipicamente homogêneos (iguais) ou heterogêneos (distintos). No modelo que utilizaram, a estratégia dos indivíduos estava em seus genes, e essa estratégia era a probabilidade de agir como um falcão. As interações entre os indivíduos da população, sejam falcões ou pombas, foram realizadas por meio do jogo FP, e foi usado o AG para a seleção, mutação e cruzamento. A população evoluiu de uma geração para outra, e a cada nova geração, os indivíduos foram substituídos e essa substituição foi feita copiando aleatoriamente os indivíduos da geração anterior. As estratégias que tiveram sucesso foram copiadas de uma geração para a outra com mais frequência, e as demais estratégias

tenderam a desaparecer nas gerações subsequentes. As estratégias na população foram permanentemente renovadas e um comportamento estável, mas dinâmico, surgiu na população.

Neste capítulo apresentam-se o modelo populacional em ACP, o modelo do indivíduo, o processo evolucionário e como serão as interações dos indivíduos, ou seja, os jogos utilizados.

4.1 MODELO POPULACIONAL EM ACP

Os indivíduos vivem em um autômato celular, em que as células estão dispostas na forma de um reticulado $n \times n = N$, com um indivíduo por célula. A linha superior do reticulado, conecta-se com a linha inferior, e a primeira coluna se conecta com a última coluna, formando uma superfície toroidal, na qual as células possuem a mesma quantidade de vizinhos.

A vizinhança de cada indivíduo i é definida pela quantidade de interações que o indivíduo vai realizar (C_i) e pelo raio máximo de alcance dessas interações (r_i). Com esses dois parâmetros e usando o modelo de vizinhança apresentado na seção 2.6 (baseado em (SCHIMIT; MONTEIRO, 2009)), tem-se a vizinhança definida por indivíduo da população. Cada interação é dada por um jogo, que será abordado na seção 4.4. Conforme será apresentado, o estado do indivíduo é dado pela sua probabilidade de cooperação em um jogo, portanto, no intervalo $0 \leq P_{C_i} < 1$. Juntando-se a isso as transições de estados feitas de forma probabilísticas, tem-se um Autômato Celular Probabilístico Contínuo (ACPC).

4.2 MODELO DO INDIVÍDUO

No modelo usado por Schimit (2016), um indivíduo i é definido pela probabilidade de cooperação P_{C_i} , representada por 15 bits interpretados como um número real no intervalo $0 \leq P_{C_i} \leq 1$.

Este modelo foi expandido para que o número de interações C_i , e o raio máximo r_i das interações também definam o indivíduo:

- C_i 4 bits interpretados como um número inteiro no intervalo de $1 \leq C_i \leq 16$;
- r_i 4 bits interpretados como um número inteiro no intervalo de $1 \leq r_i \leq 16$;

sendo assim, o número máximo de células que um indivíduo pode enxergar é 16, e o raio máximo de interação com as células vizinhas é 16.

A probabilidade de cooperação é codificada nos primeiros 15 bits do cromossomo, cujo valor em decimal representa a probabilidade P_{C_i} de cooperação do indivíduo, e essa é a sua estratégia. Um exemplo do uso dessa decodificação se encontra na figura 4.1. Quando o genótipo em binário é 11100100101011010101101, os primeiros 15 bits são

1110010010101110, 29270 em decimal, e a sua probabilidade de cooperação é 0.89, que é o resultado de $29270/32767$ (32767 é o valor máximo para um genótipo de 15 bits). Os próximos 4 bits 1010, 10 em decimal, é o número de interações $C_i = 10$. Os últimos 4 bits 1101, 13 em decimal, é o raio máximo de interações $r_i = 13$.

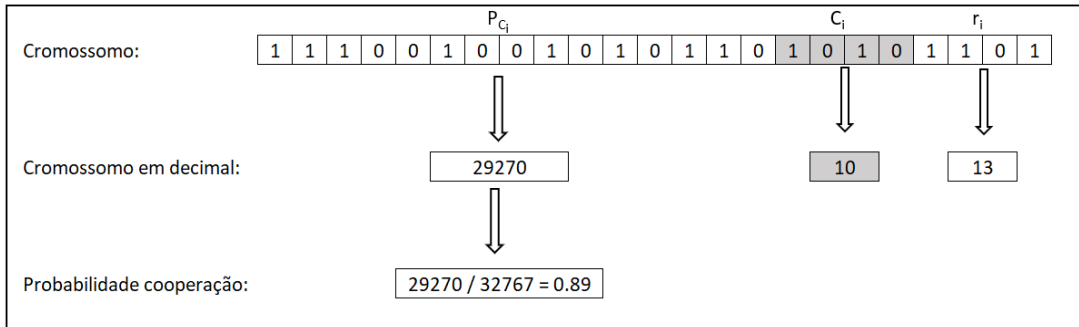


Figura 4.1: *Probabilidade de cooperação do indivíduo.*
 Fonte: elaboração própria.

4.3 O PROCESSO EVOLUCIONÁRIO

As dinâmicas populacionais do processo morte-nascimento utilizadas foram DB-B ou DB-D, ou seja, escolhe-se primeiramente indivíduo para morrer, e depois outro para nascer, com a aptidão sendo levada em consideração no momento do nascimento ou da morte, respectivamente.

Assim, uma parcela da população é renovada por passo de tempo, e será representada pela variável ρ . Para o processo DB-B, a aptidão determina quem nasce. A renovação é feita sorteando-se o indivíduo que vai morrer, e escolhendo os dois pais com melhor aptidão (maior quantidade de pontos médios em seus jogos) dentro de uma vizinhança de Moore de raio r_f centralizada na célula a ser renovada.

Para a dinâmica DB-D, a aptidão determina quem morre. Sorteia-se um indivíduo, e dentro de uma vizinhança de Moore de raio r_f , escolhe-se o indivíduo com menor aptidão (menor quantidade de pontos médios em seus jogos) para morrer, e em seguida sorteiam-se dois indivíduos aleatórios dentro dessa vizinhança para serem os pais do indivíduo que vai nascer.

Escolhidos os pais, a reprodução é feita selecionando-se aleatoriamente quais genes serão usados de cada pai. Após definido o novo cromossomo, há uma probabilidade de mutação para cada bit de cada gene que chamaremos de μ . Alguns genes são mais influentes que outros, e se sofrerem mutação as características do indivíduo serão drasticamente mudadas. Isso garante que o perfil da população não esteja numa região de soluções que não seja o equilíbrio final da população. A mutação em um gene importante que gera um indivíduo muito diferente dos demais, que pode não perdurar se não estiver numa região favorável do reticulado.

A tabela 4.1 apresenta uma comparação entre o processo evolucionário do modelo e o AG. No AG, o cromossomo é um valor numérico ou valores que representam uma solução candidata para o problema que o AG está tentando resolver, mas no processo evolucionário o cromossomo representa as características do indivíduo: probabilidade de cooperação P_{C_i} , o número de interações C_i e o raio máximo r das interações. O AG tem como objetivo maximizar ou minimizar uma função de aptidão, que deve representar o problema a ser solucionado (GOLDBERG, 1989). O algoritmo do processo evolucionário tem como objetivo gerenciar a população, ou seja, iniciar a população, substituir indivíduos, selecionar os indivíduos, e produzir uma nova geração usando os operadores genéticos e mutação. A função de aptidão do algoritmo evolucionário depende da dinâmica de renovação, que pode ser DB-B (a aptidão determina quem nasce) ou DB-D (a aptidão determina quem morre).

Tabela 4.1: *Processo evolucionário e AG*

Características	AG	Processo Evolucionário
Cromossomo	Solução candidata	Características do indivíduo (P_{C_i} , C , r)
Objetivo	Otimizar a função de aptidão	Gerenciar a população
Função de aptidão	Relacionado com o problema a ser estudado	Depende da dinâmica de renovação e está relacionado a recompensa média do indivíduo

Uma simulação contém os seguintes passos:

1. Uma população de P indivíduos é gerada, sendo que todos tem valores aleatórios para P_{C_i} , C_i e r_i ;
2. São executados t_s passos de tempo;
3. Usam-se os últimos 100 passos de tempo (quando a população atinge um estado permanente) para se calcular a média dos parâmetros de saída do modelo (P_{C_i} , C_i , r_i , jogos CC, jogos CD, jogos DC e jogos DD).

Um passo de tempo tem as seguintes etapas:

1. Cada indivíduo joga C_i vezes com seus vizinhos dentro de um raio máximo r_i , e sua aptidão média é calculada;
2. Depois que todos os indivíduos fizeram seus jogos, inicia-se o processo de renovação da população, sendo que uma parcela ρ é renovada de acordo com as regras DB-B e DB-D;

3. Definido todos os novos indivíduos, começam-se novamente todos os jogos.

Um fluxograma de uma simulação é apresentado na Figura 4.2.

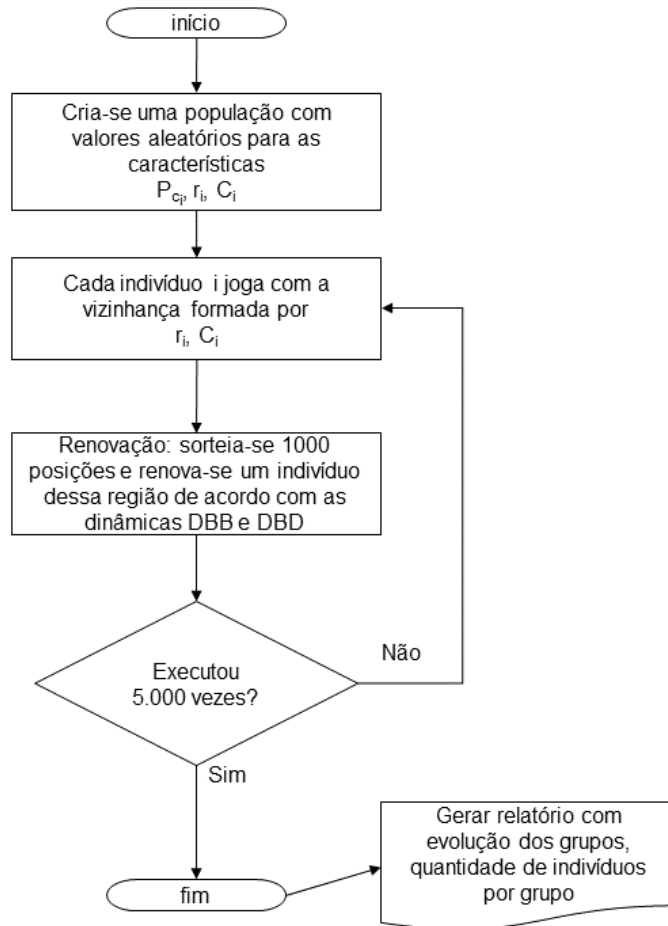


Figura 4.2: Fluxograma da simulação
Fonte: elaboração própria.

4.4 OS JOGOS CONSIDERADOS

São feitas simulações considerando dois jogos clássicos: o Dilema do Prisioneiro e o Falcão-Pomba. Em geral, os termos cooperação e traição são usados para denominar as estratégias dos jogos, sendo os nomes os mesmos para o jogo do DP, e para o jogo do FP, cooperação é agir como pomba, e traição, como falcão.

Os parâmetros usados no jogo do DP foram: $T = 5$, $R = 4$, $P = 1$ e $S = 0$. Conforme tabela 4.2, e ao término de cada jogo, os indivíduos i e j ganham pontos da seguinte maneira:

- Caso os dois jogadores cooperem, ambos ganham quatro unidades em sua aptidão, $L(i) \leftarrow L(i) + 4$ e $L(j) \leftarrow L(j) + 4$;

- Se os indivíduos traem um ao outro, ambos ganham uma unidade em sua aptidão, $L(i) \leftarrow L(i) + 1$ e $L(j) \leftarrow L(j) + 1$;
- Se o jogador i coopera e o jogador j trai, o jogador i ganha 0 unidades e o jogador j ganha 5 unidades em sua aptidão, $L(i) \leftarrow L(i) + 0$ e $L(j) \leftarrow L(j) + 5$;
- Se o jogador i trair e o jogador j cooperar, o jogador i ganha 5 unidades e o jogador j ganha 0 unidades em sua aptidão, $L(i) \leftarrow L(i) + 5$ e $L(j) \leftarrow L(j) + 0$.

Tabela 4.2: Tabela de pontuação do dilema do prisioneiro

		Indivíduo j	
		C	D
Indivíduo i	C	4,4	0,5
	D	5,0	1,1

Fonte: Schimit (2016).

Os parâmetros para o jogo do falcão-pomba foram: $T = 9$, $R = 5$, $P = 0$, $S = 1$. São mostrados na tabela 4.3 os pontos dos indivíduos i e j , e eles foram atribuídos da seguinte maneira:

- No caso de os dois jogadores agirem como pomba (cooperarem), ambos ganham cinco unidades em sua aptidão, $L(i) \leftarrow L(i) + 5$ e $L(j) \leftarrow L(j) + 5$;
- Se os jogadores agirem como falcão (traíam um ao outro), ambos ganham zero unidade em sua aptidão, $L(i) \leftarrow L(i) + 0$ e $L(j) \leftarrow L(j) + 0$;
- Se o jogador i agir como pomba (coopera) e o jogador j como falcão (trai), o jogador i ganha 1 unidades e o jogador j ganha 9 unidades em sua aptidão, $L(i) \leftarrow L(i) + 1$ e $L(j) \leftarrow L(j) + 9$;
- Se o jogador i agir como falcão (trair) e o jogador j como pomba (cooperar), o jogador i ganha 9 unidades e o jogador j ganha 1 unidades em sua aptidão, $L(i) \leftarrow L(i) + 9$ e $L(j) \leftarrow L(j) + 1$.

Tabela 4.3: Tabela de pontuação do falcão-pomba

		Indivíduo j	
		H	D
Indivíduo i	H	0,0	9,1
	D	1,9	5,5

Fonte: Schimit, Santos e Soares (2015b).

Foram realizadas simulações para o jogo do dilema do prisioneiro e falcão-pomba. No próximo capítulo os resultados das simulações são apresentados, comparados e discutidos.

Neste capítulo são apresentados os experimentos e seus resultados. A primeira sessão do capítulo começa com uma apresentação dos experimentos; na segunda seção, os resultados dos experimentos para o jogo do Dilema do Prisioneiro são apresentados; na terceira seção, os resultados dos experimentos para o jogo do Falcão-Pomba são mostrados; e na última seção, um resumo dos resultados.

Os experimentos demoraram cerca de 15 horas para rodar em uma workstation com 2 Intel Xeon E5 2620v4 2.1Gh, 64 GB de memória RAM, e uma NVIDIA Tesla P100 12GB otimizada para processamento paralelo. Em um PC com processador 3.5GHz e 16GB de RAM, o processamento chegou a levar 50 horas.

5.1 EXPERIMENTOS

Para analisar a população, os indivíduos foram separados em 10 grupos conforme a tabela 5.1. Nesta figura, é apresentado o grupo 1 contendo os indivíduos com $0 \leq P_{C_i} < 0.1$, grupo 2 com $0.1 \leq P_{C_i} < 0.2$ e assim por diante até o grupo 10 com $0.9 \leq P_{C_i} \leq 1$.

Tabela 5.1: *Probabilidade de cooperação por grupo*

Grupo	Probabilidade
1	$0 \leq P_{C_i} < 0.1$
2	$0.1 \leq P_{C_i} < 0.2$
3	$0.2 \leq P_{C_i} < 0.3$
4	$0.3 \leq P_{C_i} < 0.4$
5	$0.4 \leq P_{C_i} < 0.5$
6	$0.5 \leq P_{C_i} < 0.6$
7	$0.6 \leq P_{C_i} < 0.7$
8	$0.7 \leq P_{C_i} < 0.8$
9	$0.8 \leq P_{C_i} < 0.9$
10	$0.9 \leq P_{C_i} \leq 1$

Para os jogos DP e FP apresentados no capítulo 2, são realizados cinco experimentos computacionais:

1. *Evolução temporal:* para entender como uma simulação transcorre ao longo do tempo, foi gerado um gráfico da evolução temporal dos 10 grupos, de acordo com a tabela apresentada na figura 5.1, para os 2 jogos, com $\mu = 0$, $\mu = 0.1$, e $\mu = 0.2$;
2. *Influência de μ sobre \bar{C} e \bar{r} :* Varia-se o valor da taxa de mutação para os valores $\mu = 0, 0.01, \dots, 0.2$, executam-se 10 simulações para cada caso, e mostram-se as médias de \bar{C} e \bar{r} em função de μ ;

3. *Concentração normalizada, \bar{C} e \bar{r} para cada grupo*: para mostrar a maneira como os diferentes grupos de indivíduos se distribuem na população para $\mu = 0, 0.1, 0.2$;
4. *Distribuição espacial no reticulado*: para os mesmos casos do item 3 ($\mu = 0, \mu = 0.1$, e $\mu = 0.2$), são geradas figuras do reticulado para as duas dinâmicas para ver como os indivíduos se espalham na população ao longo do tempo;
5. *Número de jogos e nível de cooperação*: para avaliar como são feitos os jogos e o nível de cooperação na população, usa-se a configuração apresentada no item 2, para mostrar gráficos de quantidade de jogos e nível de cooperação em função de μ .

As simulações rodaram por $t_s = 5000$ passos de tempo, para garantir que a população alcance o regime permanente, e os últimos 100 passos de tempo (quando a população atinge um estado permanente) foram usados para encontrar os valores médios das variáveis de saída. Para todos os resultados apresentados nesta seção, foram executadas 10 simulações para cada conjunto de parâmetros, e os resultados médios destas simulações foram considerados. A condição inicial dos indivíduos recebeu valores aleatórios, e os indivíduos foram distribuídos homogeneamente em todas as células do reticulado.

O reticulado tem o tamanho de $n = 100$, com $N = 10000$ indivíduos, com a taxa de renovação da população de $\rho = 0.1$, ou seja, 1000 indivíduos são substituídos a cada passo de tempo. Os parâmetros de interação (C_i e r_i) evoluem individualmente. O raio para analisar os indivíduos localmente é $r_f = 4$. Os resultados para as dinâmicas DB-B e DB-D, com $\mu = 0, \mu = 0.1$, e $\mu = 0.2$, são apresentados.

Os valores das recompensas dos jogos foram apresentados na metodologia.

5.2 RESULTADOS PARA O JOGO DO DILEMA DO PRISIONEIRO

5.2.1 EVOLUÇÃO TEMPORAL

Os primeiros resultados para o tempo de evolução dos grupos, com as dinâmicas DB-B e DB-D, são apresentados na figura 5.1. Nesta figura, a cor branca corresponde ao grupo 1 e a cor preta ao grupo 10, as escalas de cinza correspondem aos grupos intermediários.

Para a dinâmica DB-B, figura 5.1a, quando $\mu = 0$, quase toda a população consiste de indivíduos que jogam traindo com alta probabilidade, portanto o grupo 1 é o mais populoso com os indivíduos com baixa probabilidade de cooperação.

A figura 5.1d apresenta o resultado da simulação para a dinâmica DB-D com $\mu = 0$, onde os 10 grupos estão representados, sendo que os indivíduos altamente cooperadores do grupo 10, estão presentes na população. Embora os indivíduos traidores do grupo 1, ocupem mais de 50% da população, os indivíduos dos outros grupos sobreviveram e alcançam um regime permanente na população.

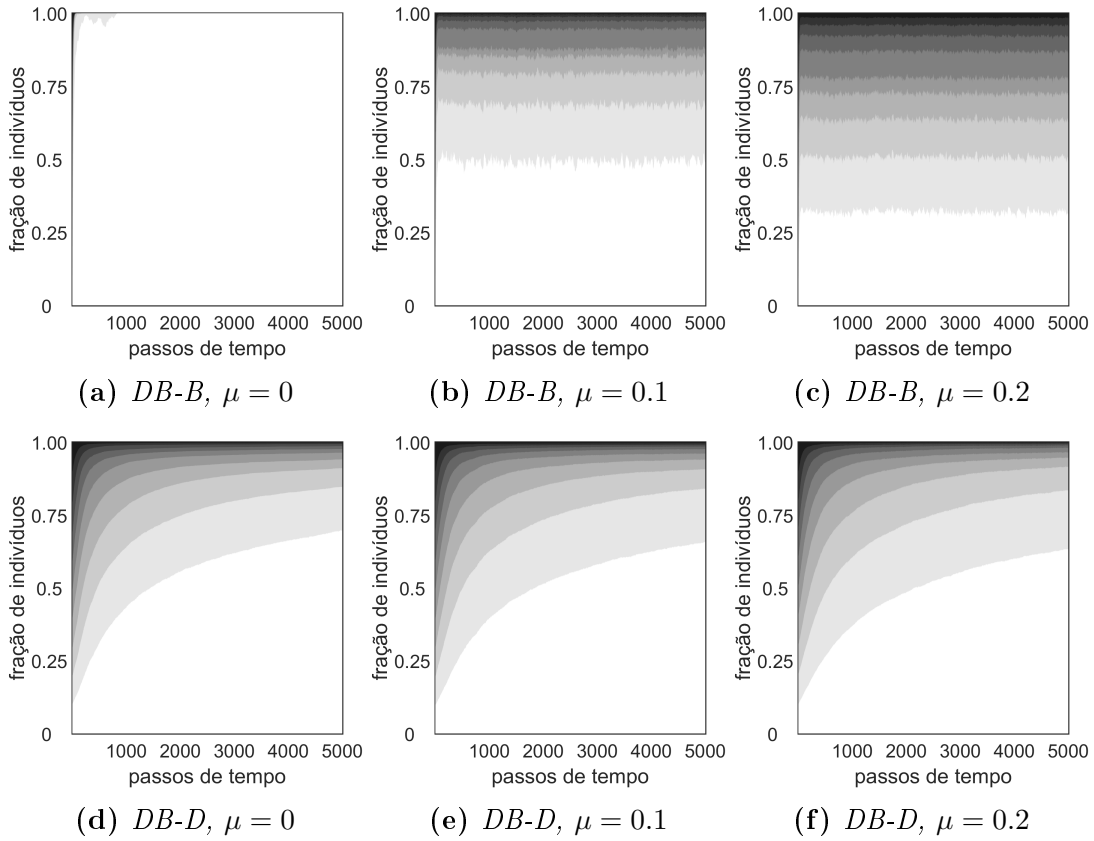


Figura 5.1: *Dilema do Prisioneiro: Evolução temporal.*

Para a dinâmica DB-B a presença de mutação introduz na populações mais indivíduos cooperadores, a mesma situação acontece para a dinâmica DB-D. A figura 5.1c apresenta a população com $\mu = 0.2$, em que mais indivíduos cooperadores foram introduzidos na população por conta do aumento da taxa de mutação. Esse aumento melhorou a cooperação de forma mais eficiente para a dinâmica DB-B.

5.2.2 INFLUÊNCIA DE μ SOBRE \bar{C} E \bar{r}

A influência que o aumento da taxa de mutação μ tem sobre \bar{C} e \bar{r} é apresentada na figura 5.2, em que foram simulados os casos $\mu = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.20$ para as dinâmicas DB-B e DB-D. Nesta figura a linha contínua \bar{r} representa o raio médio de movimentação dos indivíduos, e a linha seccionada \bar{C} representa a quantidade média de jogos, conexões ou movimentação dos indivíduos.

Para a dinâmica DB-B, conforme figura 5.2a, a média de \bar{r} mostra que os indivíduos tiveram a possibilidade de jogar com os vizinhos distantes, porém ao observar a média de \bar{C} , nota-se que somente com o aumento de μ os jogos começaram a ocorrer em maior quantidade. Com o aumento de μ , \bar{C} também aumenta, os indivíduos jogam mais partidas e \bar{r} começa a atingir um estado permanente. Quando isso ocorre, o grupo que joga cooperando aumenta enquanto o que joga traindo diminui.

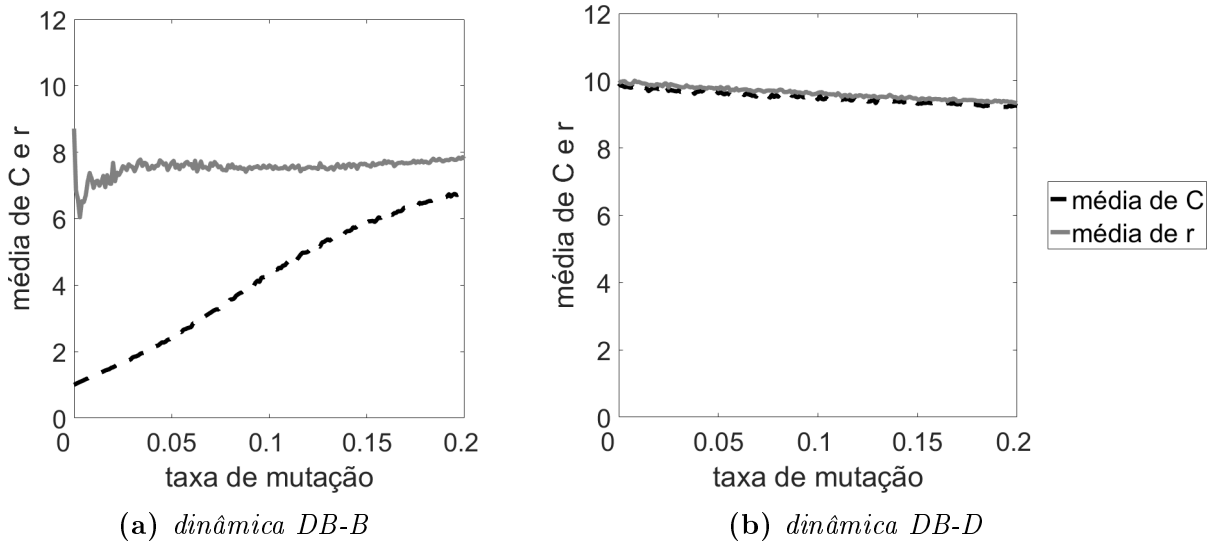


Figura 5.2: *Dilema do Prisioneiro: Influência de μ sobre \bar{C} e \bar{r} .*

Na dinâmica DB-D, figura 5.2b, a média de \bar{r} é maior que na dinâmica DB-B, e os indivíduos aproveitam o raio para se movimentar, ou seja, \bar{C} permanece muito próximo de \bar{r} , e isso significa que os indivíduos jogam mais partidas. Nesta dinâmica, conforme μ aumenta, ocorre uma diminuição na média de \bar{C} e \bar{r} , e a fração de indivíduos traindo durante os jogos sofre variação em função de μ , \bar{C} e r , conforme figura 5.1f.

A variação de μ influenciou na quantidade de jogos dentro do raio ao longo do tempo de maneira diferente para as dinâmicas DB-B e DB-D. Enquanto para DB-B \bar{C} e \bar{r} aumentaram, para DB-D eles tiveram uma leve queda. O entendimento desses resultados será complementado com as sessões 5.2.3, 5.2.4 e posteriormente 5.2.5.

5.2.3 CONCENTRAÇÃO DOS GRUPOS EM RELAÇÃO A \bar{C} E \bar{r}

Analisa-se a distribuição dos grupos e seus valores médios de interação e raio de interação \bar{C} e \bar{r} para diferentes valores de μ , com os resultados nas figuras 5.3a, 5.3b, 5.3c, 5.4a, 5.4b e 5.4c, para as dinâmicas DB-B e DB-D.

A figura 5.1a da seção 5.2.1 para a dinâmica DB-B, corrobora os resultados apresentados na figura 5.3a com $\mu = 0$, onde a maioria da população consiste de indivíduos do grupo 1, e também como visto na figura 5.2a da seção 5.2.1 para a dinâmica DB-B, o raio é maior quando $\mu = 0$ e assim os traidores entram em todos os grupos. Com o aumento da quantidade de jogos devido à variação de μ , figura 5.2a, todos os grupos já estão representados, figuras 5.3b e 5.3c, sendo que os indivíduos passaram a se movimentar mais e o número de jogos aumentou.

Para a dinâmica DB-D com $\mu = 0$, figura 5.4a, todos os grupos estão representados e embora nesta dinâmica DB-D todos os grupos estejam se movimentando e realizando muitos jogos o grupo 1 dos indivíduos mais traidores é o mais populoso no reticulado,

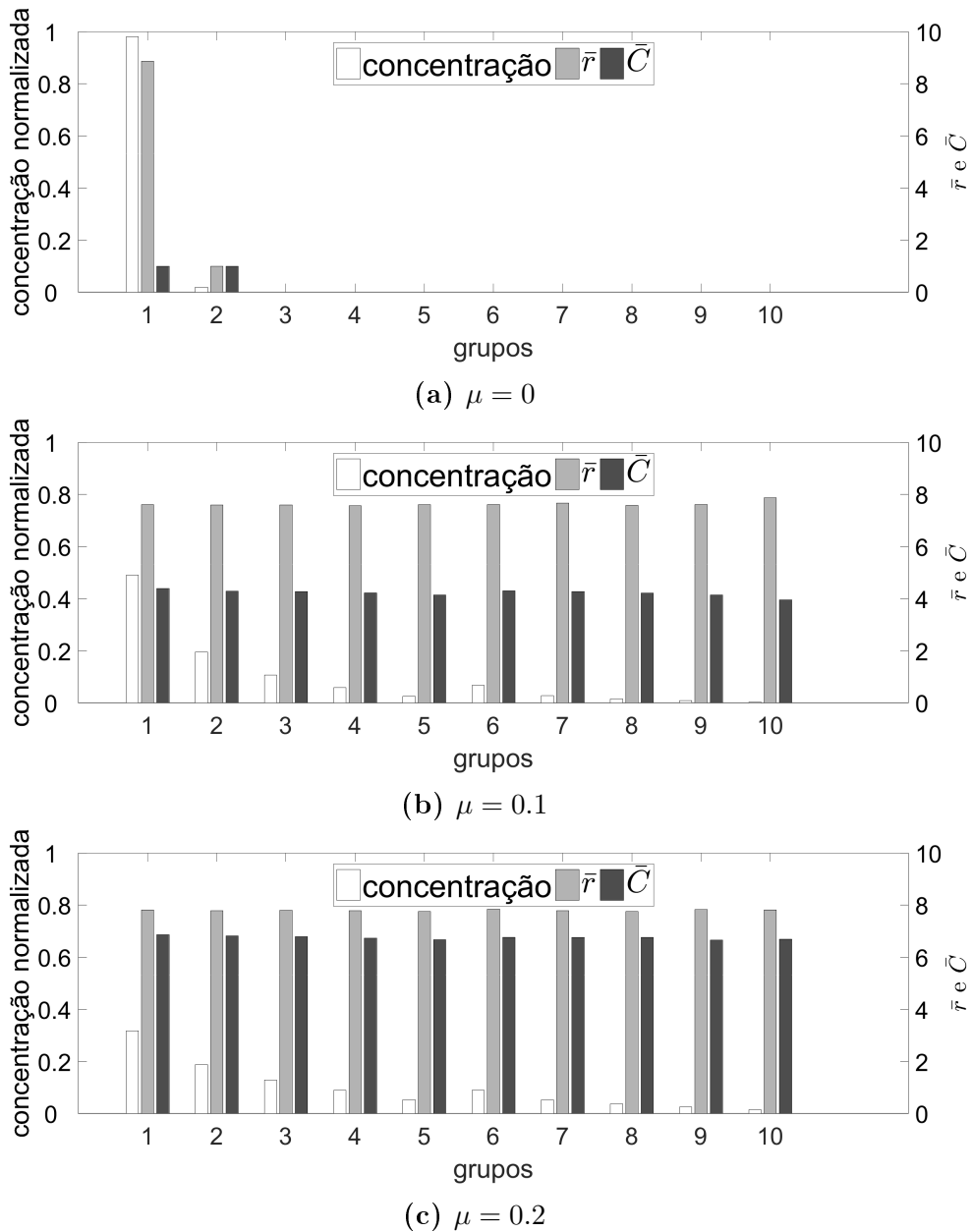


Figura 5.3: Dilema do Prisioneiro: \bar{r} e \bar{C} para DB-B.

figura 5.4b e 5.4c.

A dinâmica DB-B promoveu a cooperação, sendo que os grupos mais cooperadores apareceram com o aumento de μ , e além disso, o grupo 10 teve maior representatividade do que na dinâmica DB-D. Na dinâmica DB-B, com o aumento de μ , o grupo 1 diminuiu de forma visível nas figuras 5.3a, 5.3b e 5.3c.

5.2.4 DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL NO RETICULADO

A distribuição espacial dos indivíduos para as dinâmicas DB-B (a, b, c) e DB-D (d, e, f), para $\mu = 0$, $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,2$ são mostradas na figura 5.5. Um ponto branco

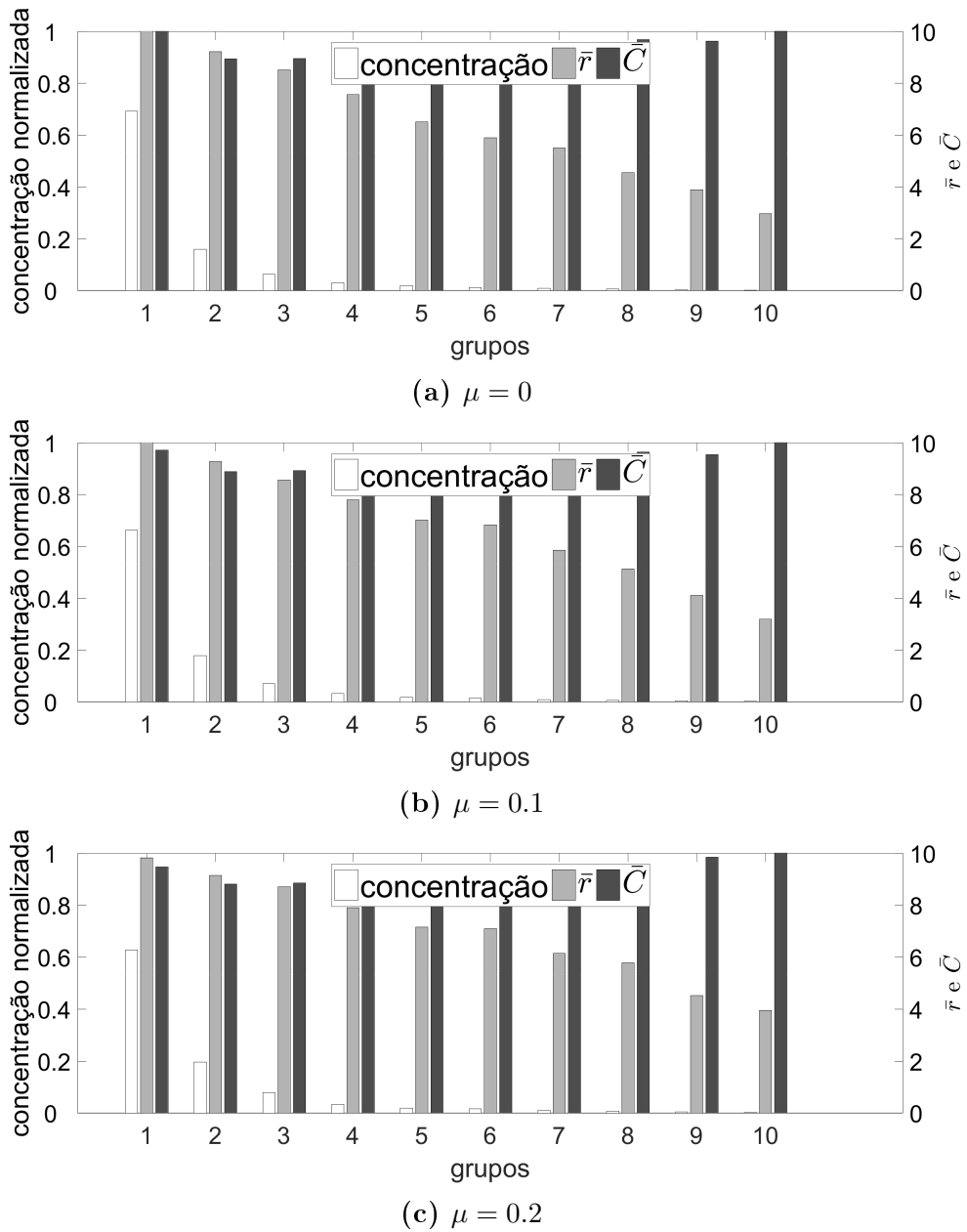


Figura 5.4: *Dilema do Prisioneiro: \bar{r} e \bar{C} para DB-D.*

corresponde a um indivíduo do grupo 1 e um ponto preto, a um do grupo 10, com escala de cinza para grupos intermediários.

Na figura 5.5a, pode-se notar que aparece um quadro totalmente branco, o que significa que quando $\mu = 0$ e a dinâmica é DB-B, a população é composta por indivíduos que pertencem ao grupo 1. Com $\mu = 0.1$, na Figura 5.5b, todos os grupos estão representados no reticulado, com os cooperadores formando pequenos agrupamentos de proteção contra os traidores. Quando $\mu = 0.2$, na Figura 5.5c tem-se o reticulado mais escuro, indicando uma diminuição de indivíduos mais traidores, embora eles sejam a maioria na população.

As simulações com a dinâmica DB-D podem ser analisada nas figuras 5.5d, 5.5e e 5.5f, para $\mu = 0$, $\mu = 0.1$ e $\mu = 0.2$ respectivamente. A aglomeração dos clusters de grupos de

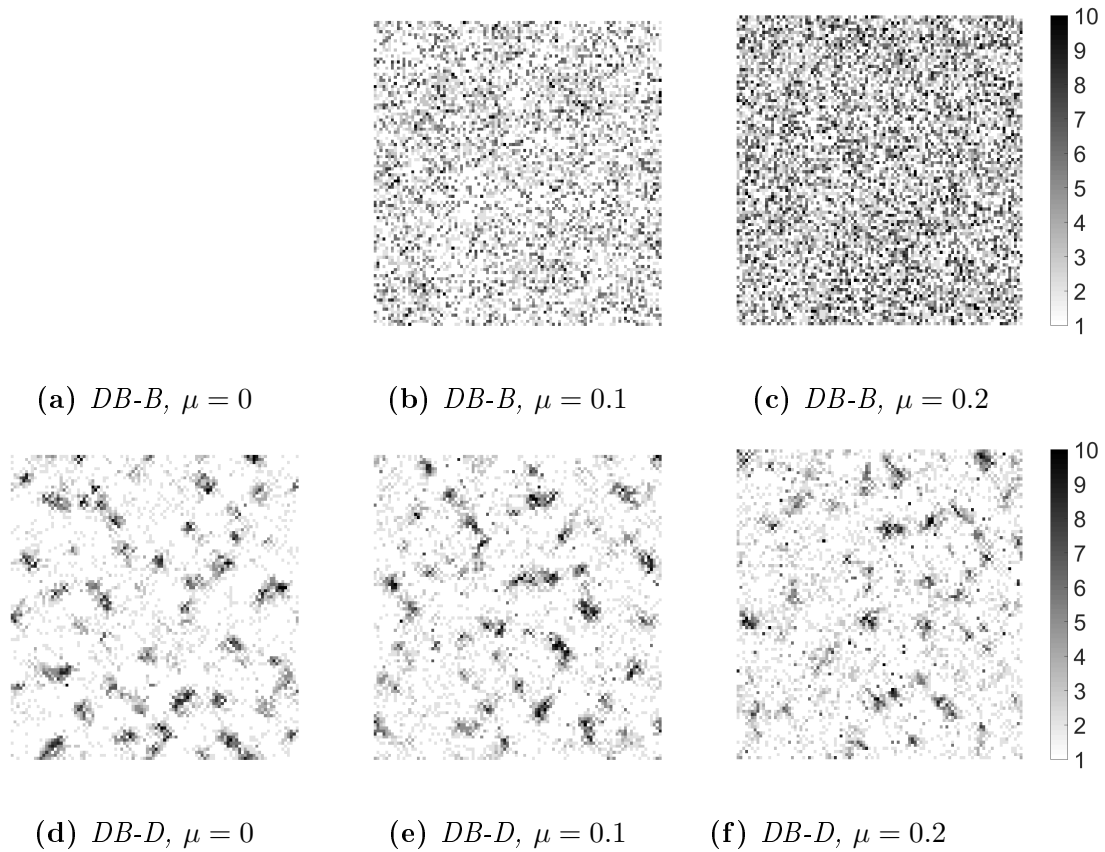


Figura 5.5: *Dilema do Prisioneiro: Distribuição espacial dos indivíduos no reticulado.*

indivíduos está mais visível do que na dinâmica *DB-B*, e mesmo com a variação de μ os traidores ocupam mais espaço na população do que os cooperadores.

Para a dinâmica *DB-D*, com $\mu = 0$, como visto na Figura 5.5d, o grupo 1 é o mais populoso, ocupando mais de 50% da população. Ocorrem mais jogos, os indivíduos se movimentam mais e tem maior raio de atuação. Os poucos indivíduos cooperadores da população formam agrupamentos. Quando $\mu = 0.1$, Figura 5.5e, a quantidade de indivíduos do grupo 2 aumenta. Na Figura 5.5f, com $\mu = 0.2$, os tons mais acinzentados indicam o aparecimento dos outros grupos com maior probabilidade de cooperação.

5.2.5 NÚMERO DE JOGOS E NÍVEL DE COOPERAÇÃO

A figura 5.6 contém: o total de jogos, jogos em que os dois indivíduos jogam cooperando (jogos *CC*), jogam traindo (jogos *DD*), jogam com diferentes estratégias (jogos *CD* e *DC*), a média da probabilidade de cooperação do cromossomo dos indivíduos \bar{P}_C e a média de ações cooperativas nos jogos \bar{A}_C .

Na figura 5.6a da dinâmica *DB-B* com $\mu = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.20$, o total de jogos aumenta com o aumento de μ . Os jogos *DD* também aumentam com o aumento de μ . Os jogos *CD* e *DC* ocorrem em proporção semelhante. Os jogos *CC* aumentam levemente

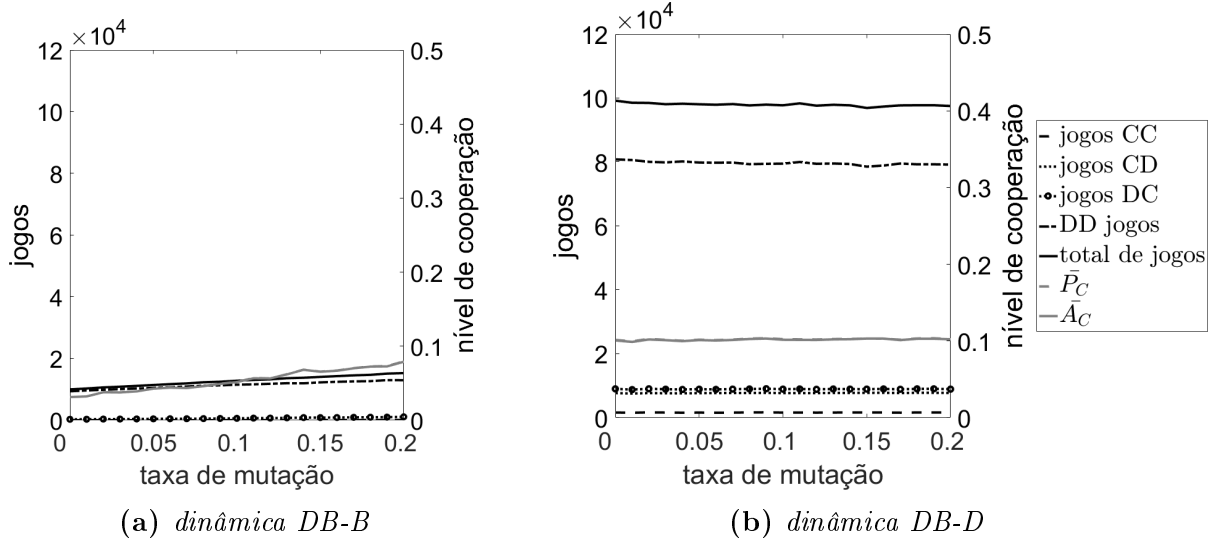


Figura 5.6: Dilema do Prisioneiro: Número de jogos e nível de cooperação.

com o aumento de μ .

Na figura 5.6b para DB-D, o total de jogos se estabiliza enquanto μ aumenta, mas ocorrem mais jogos nesta dinâmica do que na dinâmica DB-B. Os indivíduos mais cooperadores que jogam CC permanecem jogando de modo estável durante as variações de μ . Existem mais indivíduos jogando DC do que CD. Ainda os indivíduos que jogam DD são a maioria na população e jogam assim durante as variações de μ nas simulações. O nível de cooperação desta dinâmica é maior do que na dinâmica DB-B, pois tem mais indivíduos jogando CC, CD e DC.

5.3 RESULTADOS PARA O JOGO DO FALCÃO-POMBA

5.3.1 EVOLUÇÃO TEMPORAL

A evolução temporal das simulações com o jogo do FP para as dinâmicas DB-B e DB-D são apresentados na Figura 5.7. Na dinâmica DB-B, quando $\mu = 0$ (Figura 5.7a), o grupo 2 é a maioria da população. Já para $\mu = 0.2$ (Figura 5.7c), os demais grupos estão presentes no regime permanente. Também se observa que o aumento da mutação leva a uma população com maior variedade de grupos e maior cooperação.

Para a dinâmica DB-D com $\mu = 0$ (Figura 5.7d), se percebe que os grupos menos cooperadores são maioria na população (embora todos os grupos estejam representados), e que a taxa de mutação não influencia a composição de grupos ou o nível de cooperação da população (Figuras 5.7e e 5.7f).

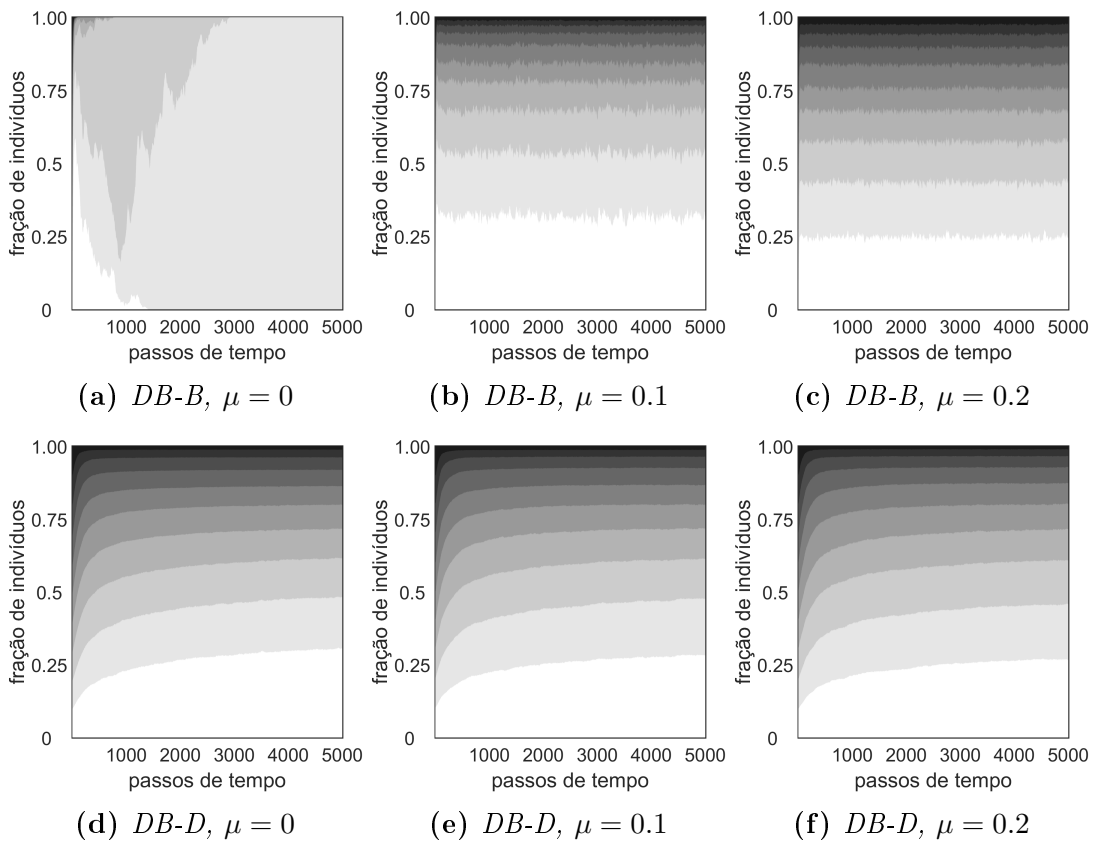


Figura 5.7: *Falcão-pomba: Evolução temporal.*

5.3.2 INFLUÊNCIA DE μ SOBRE \bar{C} E \bar{r}

A figura 5.8 apresenta a influência que μ tem sobre \bar{C} e \bar{r} para o jogo do FP e as dinâmicas DB-B e DB-D. Para a dinâmica DB-B, figura 5.8a, quando μ aumenta, \bar{C} aumenta, e depois de uma oscilação inicial, \bar{r} se mantém constante. Já para a dinâmica DB-D, 5.8b, tanto \bar{C} quanto \bar{r} diminuem levemente conforme se aumenta a taxa de mutação.

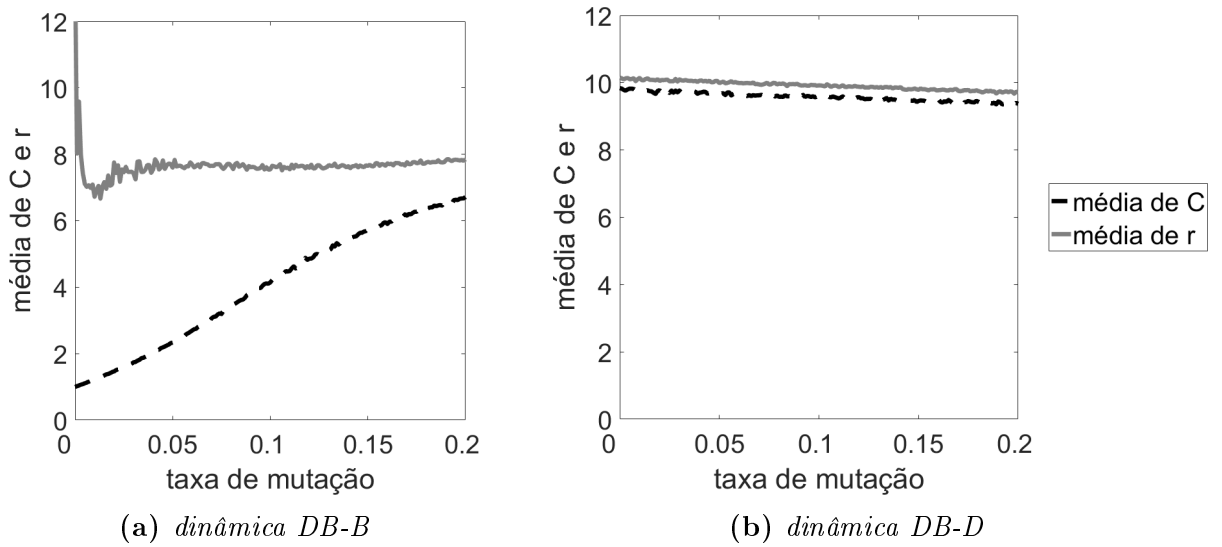


Figura 5.8: *Falcão-pomba: Influência de μ sobre \bar{C} e \bar{r} .*

Para a dinâmica DB-D (Figura 5.8b), pode ser observado que o aumento da mutação faz com que os indivíduos joguem menos, se agrupem em grupos de cooperação e que os indivíduos traidores tenham seu raio de atuação diminuído. Assim os traidores tem menor alcance nos grupos de cooperação.

5.3.3 CONCENTRAÇÃO DOS GRUPOS EM RELAÇÃO A \bar{C} E \bar{r}

Para as dinâmicas DB-B e DB-D tem-se o mesmo efeito encontrado no jogo do DP. Ou seja, para a DB-B (Figura 5.9a), os indivíduos tem a mesma configuração de interação, com valores próximos de \bar{C} e \bar{r} , sendo que quando se aumenta a taxa de mutação, as concentrações dos grupos mudam, e os indivíduos tendem a interagir mais vezes com seus vizinhos.

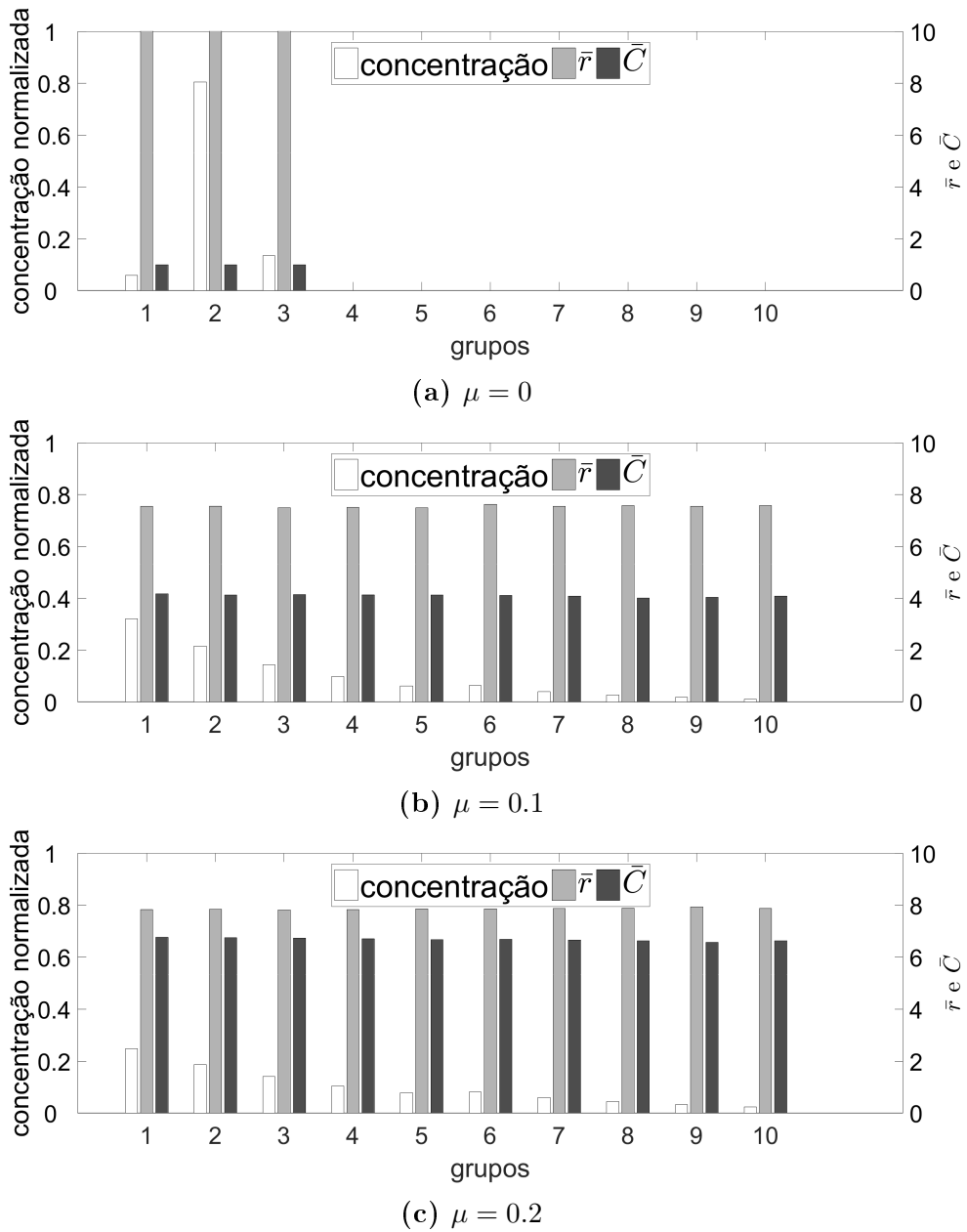


Figura 5.9: *Falcão-pomba: \bar{r} e \bar{C} para DB-B.*

Já para a dinâmica DB-D, (Figura 5.10a), os grupos mais cooperadores tendem a se movimentar menos e com menor raio, e percebe-se que a taxa de mutação não muda as características gerais do jogo do FP.

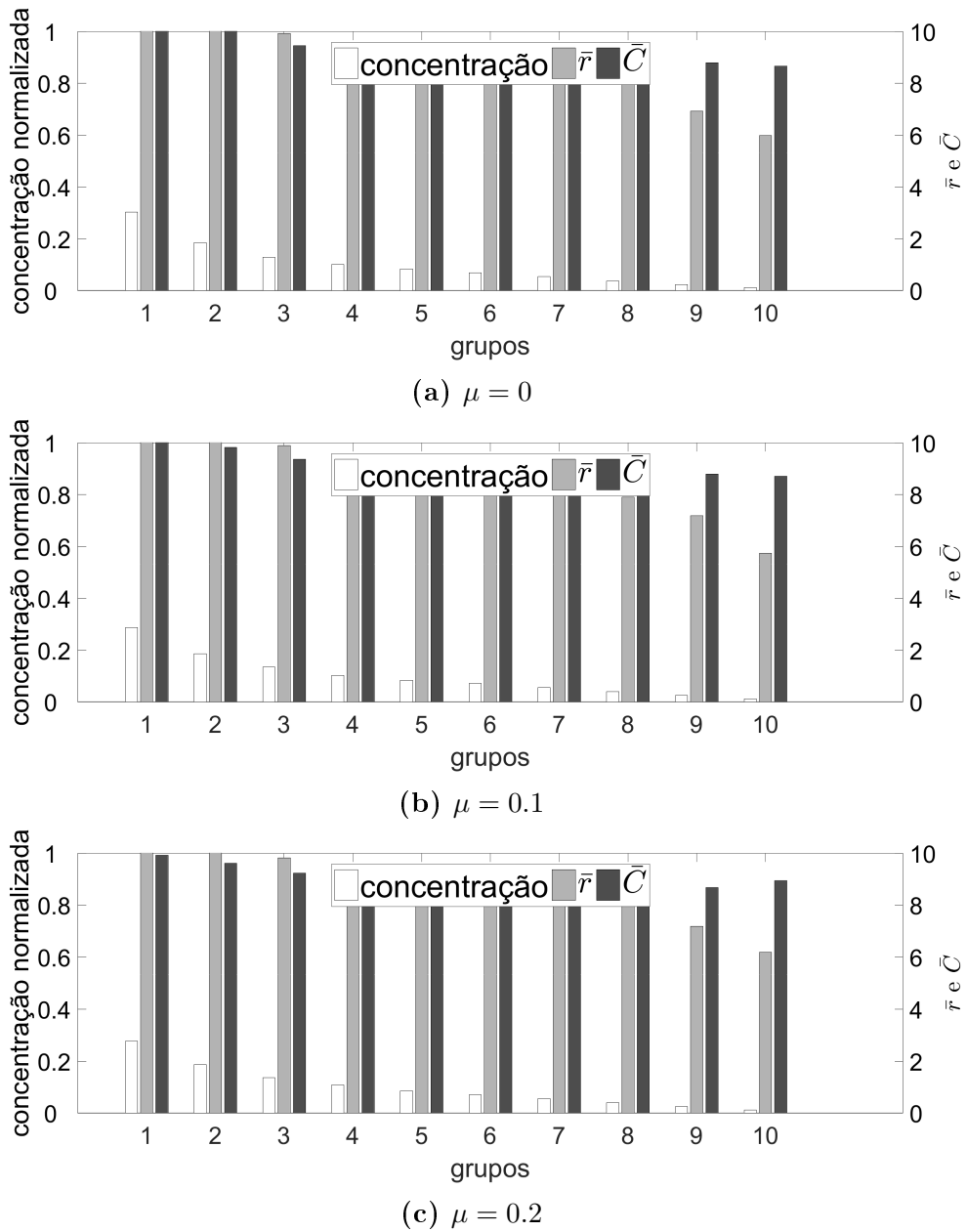


Figura 5.10: *Falcão-pomba*: \bar{r} e \bar{C} para DB-D.

Mais uma vez pode-se observar que no jogo do FP, a dinâmica DB-D promove a cooperação e não é influenciada pelo aumento da taxa de mutação. Porém, para a dinâmica DB-B, é necessário um estímulo para que a cooperação apareça na população, e esse estímulo é o aumento da taxa de mutação μ .

5.3.4 DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL NO RETICULADO

A distribuição espacial dos diferentes grupos no reticulado para o jogo do FP segue o mesmo padrão do jogo do DP, e se encontra na Figura 5.11a. Para a dinâmica DB-B, tem-se um grupo tomando a maioria do espaço quando $\mu = 0$ (grupo 2), e uma mistura de grupos quando se aumenta a taxa de mutação. Já para a dinâmica DB-D, tem-se

agrupamentos de grupos cooperadores pelo reticulado para qualquer valor da taxa de mutação.

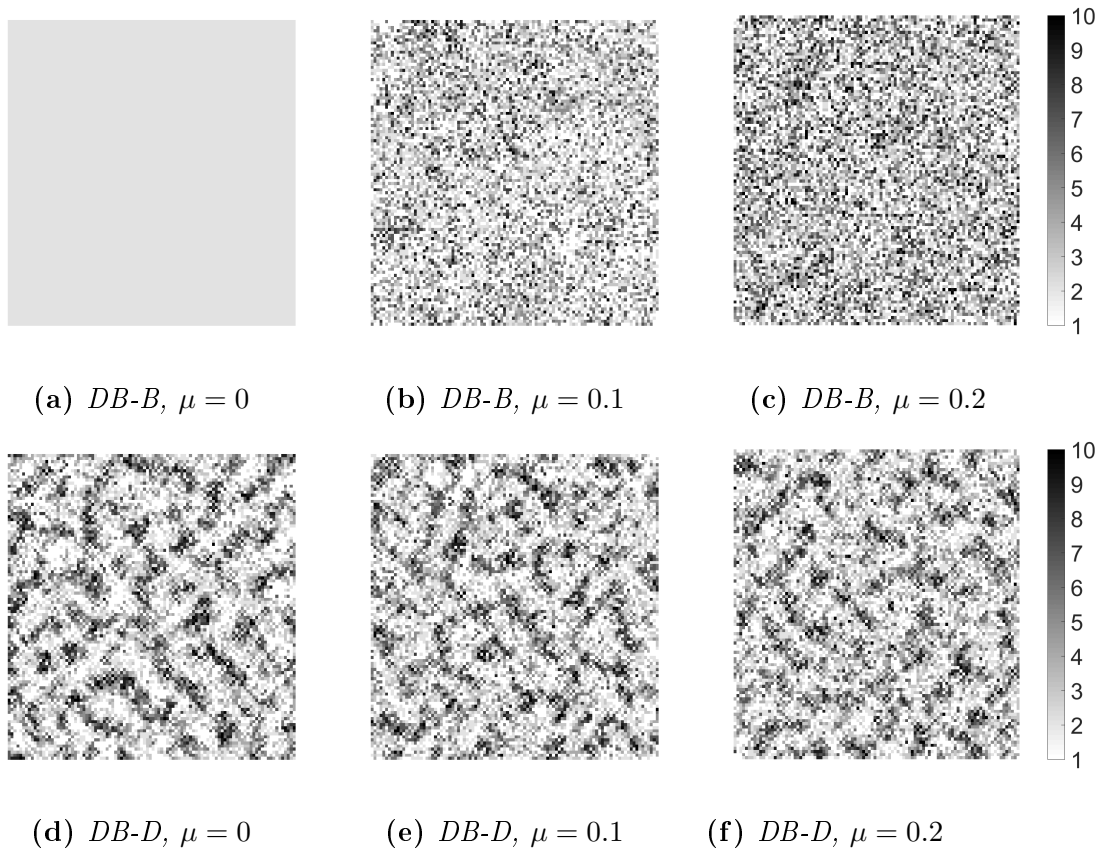


Figura 5.11: *Falcão-pomba: Distribuição espacial dos indivíduos no reticulado.*

5.3.5 NÚMERO DE JOGOS E NÍVEL DE COOPERAÇÃO

Em termos de quantidade de jogos, as simulações com o jogo do FP mostram resultados similares ao jogo do DP. Menos jogos para a dinâmica DB-B, mais jogos para a dinâmica DB-D, e além disso, um maior nível de cooperação para as duas dinâmicas, com $\bar{P}_C \approx 0,18$ para a dinâmica DB-B, e $\bar{P}_C \approx 0,28$ para a DB-D.

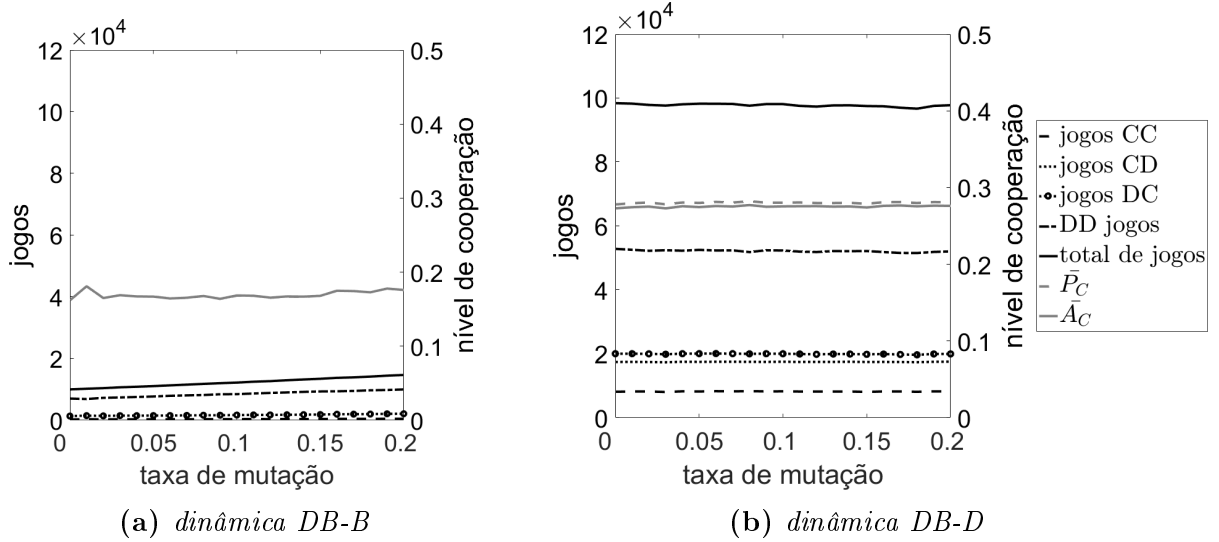


Figura 5.12: *Falcão-pomba*: Número de jogos e nível de cooperação.

5.4 RESUMO DOS RESULTADOS

A quantidade de interações e o raio de interação médios dos grupos variaram de maneira semelhante para os dois jogos e as dinâmicas de renovação usadas. Em relação à estratégia para os jogos, há um cenário com maior presença de ações traidoras no jogo do DP em relação ao jogo do FP.

Para os dois jogos, o aumento da taxa de mutação aumenta a cooperação na população não apenas por mudar o genótipo dos traidores, mas por estes terem que se adaptar a uma população com maior quantidade de estratégias cooperadoras, que se agrupam no reticulado (para a dinâmica DB-D). Os traidores se espalham entre esses grupos, e tem que aumentar seus raios de interação para tentar jogar com indivíduos cooperadores. No jogo do DP com a dinâmica DB-B, a mutação fez aumentar os indivíduos cooperadores, mas não influenciou a população para a dinâmica DB-D.

No jogo do FP com a dinâmica DB-B, o aumento da taxa de mutação teve efeito na população trazendo mais indivíduos cooperadores. Porém, isso não acontece para o jogo do FP com a dinâmica DB-D, em que a taxa de mutação não influencia a distribuição de grupos na população, bem como seu comportamento espacial, pouco afeta as características de interação dos indivíduos, e não altera o nível de cooperação na população. Ou seja, o aumento da taxa de mutação não muda a configuração da população nesta dinâmica.

No próximo capítulo as conclusões finais serão apresentadas.

Com a análise dos resultados deste trabalho conclui-se que os objetivos propostos foram atingidos. Foi proposto um modelo baseado em (SCHIMIT, 2014; SCHIMIT, 2016), com o uso de duas dinâmicas de morte-nascimento, sendo uma que considerava a aptidão do indivíduo na morte, e outra no nascimento. Porém, o objetivo principal do trabalho foi explorar o que acontece na população quando as características de interação de um indivíduo também evoluem junto com a estratégia do jogo em consideração.

A quantidade de jogos e o raio máximo de interação foram considerados como características complementares da estratégia de jogo dos indivíduos. Dois jogos foram considerados para as interações entre indivíduos:

Dilema do Prisioneiro e Falcão-Pomba. Os jogos são diferentes em suas melhores respostas estratégicas, sendo que a melhor estratégia para o DP é sempre trair quando somente um jogo é disputado, e para o FP são três equilíbrios: dois para os jogadores jogando estratégias opostas, ou um equilíbrio em estratégia mista (SMITH, 1982). A evolução da população foi analisada sob diferentes métodos de renovação dos indivíduos, ou seja, pelo uso do processo morte-nascimento com as dinâmicas DB-B e DB-D. Entre os dois jogos, o jogo do FP, com as duas dinâmicas DB-B e DB-D, teve um maior nível de cooperação.

Nos cenários usados, as populações atingiram um equilíbrio permanente após uma quantidade de interações, assim como nos trabalhos (SCHIMIT, 2014; SCHIMIT, 2016) que encontraram cenários em que as populações atingiam um equilíbrio permanente após uma quantidade de interações, e em (LARUELLE; ROCHA; ESCOBEDO, 2018) o mesmo foi encontrado para o jogo do FP num modelo similar ao apresentado em (SCHIMIT, 2014). O nível de cooperação baixo foi encontrado para todos os cenários, assim como nos trabalhos de (SCHIMIT, 2014; SCHIMIT, 2016), em que a avaliação dos melhores indivíduos se davam por funções de aptidão. Em (SCHIMIT, 2016), com algumas funções de aptidão que melhor avaliavam indivíduos menos traidores, a cooperação atingiu níveis maiores. Foi observado que quando deixamos flexíveis as características de movimentação, há uma diferença de comportamento nos indivíduos de acordo com a dinâmica e com o jogo utilizados.

Ainda que usando uma população baseada em redes, o trabalho de Pattni, Broom e Rychtář (2017) mostrou que a dinâmica DB-D, leva a níveis de cooperação maiores em uma população, e isso foi corroborado aqui. O reticulado espacial permitiu que os cooperadores formassem grupos espaciais, se protegendo de traidores, sendo que estes por sua vez, precisaram evoluir com características de interação que os permitissem “invadir esses grupos”. Por fim, esses grupos espaciais formam uma certa memória coletiva da população, uma característica que melhora a sobrevivência de cooperadores. Contrastando

com uma situação diferente, usando uma memória individual (CROWLEY et al., 1996), em que a memória de indivíduos que jogavam o DP aumentou o nível de cooperação na população.

O presente trabalho apresentou muitos conceitos, e entre eles há alguns que são por si só campos de pesquisa, sendo assim, este estudo serve como ponto de partida para outras investigações. Os próximos passos deste trabalho poderiam ser na direção de:

- Usar outros jogos clássicos da teoria de jogos, como o jogo do contrato social ou o jogo dos bens públicos;
- Usar jogos multi-jogadores;
- Possibilitar uma maneira de um indivíduo escolher sua vizinhança para avaliar se isso levaria a grupos mais separados no reticulado, como feito em (PATTONI; BROOM; RYCHTÁŘ, 2017);
- Assim como feito em (MATSUMOTO et al., 2017), comparar os indivíduos que estão em diferentes grupos espaciais no reticulado;
- Fazer simulações com outros valores para os jogos, como feito em (SCHIMIT, 2016).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALENCAR, A. I.; YAMAMOTO, M. E. A teoria dos jogos como metodologia de investigação científica para a cooperação na perspectiva da psicologia evolucionista. *Psico*, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande, v. 39, n. 4, p. 3, 2008. Not cited.
- ANTAL, T.; REDNER, S.; SOOD, V. Evolutionary dynamics on degree-heterogeneous graphs. *Physical review letters*, APS, v. 96, n. 18, p. 188104, 2006. Citado na pág. 27.
- AXELROD, R. Effective choice in the prisoner's dilemma. *Journal of conflict resolution*, Sage Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 24, n. 1, p. 3–25, 1980. Citado na pág. 18.
- AXELROD, R. More effective choice in the prisoner's dilemma. *Journal of Conflict Resolution*, Sage Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 24, n. 3, p. 379–403, 1980. Citado na pág. 18.
- AXELROD, R.; AXELROD, D. E.; PIENTA, K. J. Evolution of cooperation among tumor cells. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 103, n. 36, p. 13474–13479, 2006. Citado na pág. 29.
- AXELROD, R.; HAMILTON, W. D. The evolution of cooperation. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 211, n. 4489, p. 1390–1396, 1981. Citado na pág. 11.
- BENJAMIN, S. C.; JOHNSON, N. F.; HUI, P. Cellular automata models of traffic flow along a highway containing a junction. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 29, n. 12, p. 3119, 1996. Citado na pág. 20.
- CHEN, Q.; CHEN, T.; WANG, Y. Cleverly handling the donation information can promote cooperation in public goods game. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 346, p. 363–373, 2019. Citado na pág. 31.
- CHEN, Z.; GAO, J.; CAI, Y.; XU, X. Evolution of cooperation among mobile agents. *Physica A*, v. 390, p. 1615–1622, 2011. Citado na pág. 29.
- CROWLEY, P. H.; PROVENCHER, L.; SLOANE, S.; DUGATKIN, L. A.; SPOHN, B.; ROGERS, L.; ALFIERI, M. Evolving cooperation: the role of individual recognition. *Biosystems*, Elsevier, v. 37, n. 1-2, p. 49–66, 1996. Citado na pág. 28, 53.
- EVILSIZOR, S.; LANCHIER, N. et al. Evolutionary games on the lattice: best-response dynamics. *Electronic Journal of Probability*, The Institute of Mathematical Statistics and the Bernoulli Society, v. 19, 2014. Citado na pág. 12.
- FERREIRA, A. B. d. H. *Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa*. [S.l.]: Nova Fronteira, 1999. Citado na pág. 15.
- FIANI, R. *Teoria dos jogos*. [S.l.]: Elsevier Brasil, 2006. Citado na pág. 11, 12, 15, 17.
- GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1989. Citado na pág. 22, 23, 24, 25, 35.
- GUO, H.; SHEN, C.; DAI, D.; ZHANG, M.; CHU, C.; SHI, L. Environment promotes the evolution of cooperation in spatial voluntary prisoner's dilemma game. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 315, p. 47–53, 2017. Citado na pág. 29.

HAUERT, C.; DOEBELI, M. Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 428, n. 6983, p. 643, 2004.

Citado na pág. 19.

HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. *Practical genetic algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado na pág. 23.

HEUS, P. D.; HOOGERVORST, N.; DIJK, E. V. Framing prisoners and chickens: Valence effects in the prisoner's dilemma and the chicken game. *Journal of Experimental Social Psychology*, Elsevier, v. 46, n. 5, p. 736–742, 2010. Not cited.

HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. Evolutionary game dynamics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 40, n. 4, p. 479–519, 2003. Citado na pág. 12.

HOGEWEG, P. Cellular automata as a paradigm for ecological modeling. *Applied mathematics and computation*, v. 27, n. 1, p. 81–100, 1988. Citado na pág. 20.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. [S.l.]: MIT press, 1992.

Citado na pág. 22, 23.

JIA, N.; MA, S. Evolution of cooperation in the snowdrift game among mobile players with random-pairing and reinforcement learning. *Physica A*, v. 392, n. 22, p. 5700–5710, 2013. Citado na pág. 29.

JOHNSTON, N. *Generating Sequences of Primes in Conway's Game of Life*. 2009.

Disponível em: <<http://www.njohnston.ca/2009/08/generating-sequences-of-primes-in-conways-game-of-life/>>. Acesso em: 14 nov. 2018. Citado na pág. 20.

KANSAL, A. R.; TORQUATO, S.; IV, G. H.; CHIOCCA, E.; DEISBOECK, T. Simulated brain tumor growth dynamics using a three-dimensional cellular automaton. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 203, n. 4, p. 367–382, 2000. Citado na pág. 20.

LARUELLE, A.; ROCHA, A. B. da S.; ESCOBEDO, R. The hawk–dove game in phenotypically homogeneous and heterogeneous populations of finite dimension. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 55, p. 56–67, 2018. Citado na pág. 31, 52.

LI, X.; WU, Y.; RONG, Z.; ZHANG, Z.; ZHOU, S. The prisoner's dilemma in structured scale-free networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 42, n. 24, p. 245002, 2009. Citado na pág. 19.

LIEBERMAN, E.; HAUERT, C.; NOWAK, M. A. Evolutionary dynamics on graphs. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 433, n. 7023, p. 312–316, 2005. Citado na pág. 13, 25, 26, 27, 28, 30.

LIU, R.-R.; JIA, C.-X.; RONG, Z. Effects of enhancement level on evolutionary public goods game with payoff aspirations. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 350, p. 242–248, 2019. Citado na pág. 11.

MACHICAO, J.; MARCO, A. G.; BRUNO, O. M. Chaotic encryption method based on life-like cellular automata. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 39, n. 16, p. 12626–12635, 2012. Citado na pág. 20.

- MASUDA, N. Directionality of contact networks suppresses selection pressure in evolutionary dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 258, n. 2, p. 323–334, 2009. Citado na pág. 25, 30.
- MASUDA, N.; AIHARA, K. Spatial prisoner's dilemma optimally played in small-world networks. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 313, n. 1-2, p. 55–61, 2003. Citado na pág. 19.
- MATSUMOTO, R.; TOKUMITSU, M.; KOSHIMIZU, H.; ISHIDA, Y. A novel technique for quantifying clusters based on small squares in a spatial prisoner's dilemma. *Procedia Computer Science*, v. 112, p. 2497–2505, 2017. Citado na pág. 19, 53.
- MCCALL, J. Genetic algorithms for modelling and optimisation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 184, n. 1, p. 205–222, 2005. Citado na pág. 23, 24.
- MITCHELL, M. Genetic algorithms: An overview. *Complexity*, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 31–39, 1995. Citado na pág. 23.
- MONK, T. Martingales and the fixation probability of high-dimensional evolutionary graphs. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 451, p. 10–18, 2018. Citado na pág. 13, 25.
- MORAN, P. A. P. Random processes in genetics. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical proceedings of the cambridge philosophical society*. [S.l.], 1958. v. 54, n. 1, p. 60–71. Citado na pág. 25, 29, 30.
- MORAN, P. A. P. *The statistical process of evolutionary theory*. [S.l.]: Clarendon Press, 1962. Citado na pág. 13.
- NAKAMARU, M.; MATSUDA, H.; IWASA, Y. The evolution of cooperation in a lattice-structured population. *Journal of theoretical Biology*, Elsevier, v. 184, n. 1, p. 65–81, 1997. Citado na pág. 27.
- NAKAMARU, M.; NOGAMI, H.; IWASA, Y. Score-dependent fertility model for the evolution of cooperation in a lattice. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 194, n. 1, p. 101–124, 1998. Citado na pág. 27.
- NAKAMARUA, M.; IWASA, Y. The coevolution of altruism and punishment: Role of the selfish punisher. *Journal of Theoretical Biology* 240, v. 240, p. 475–488, 2006. Citado na pág. 29.
- NOWAK, M. A. Evolving cooperation. *Journal of theoretical biology*, Academic Press, v. 299, p. 1–8, 2012. Citado na pág. 11, 19.
- NOWAK, M. A.; MAY, R. M. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, v. 359, p. 826–829, 1992. Citado na pág. 11, 15, 18, 19, 27, 28.
- NOWAK, M. A.; MAY, R. M. The spatial dilemmas of evolution. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 3, n. 1, p. 35–78, 1993. Citado na pág. 16, 28.
- OHTSUKI, H.; HAUERT, C.; LIEBERMAN, E.; NOWAK, M. A. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 441, n. 7092, p. 502, 2006. Citado na pág. 13, 27.

- OHTSUKI, H.; NOWAK, M. A. The replicator equation on graphs. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 243, n. 1, p. 86–97, 2006. Citado na pág. 27.
- PATTNI, K.; BROOM, M.; RYCHTÁŘ, J. Evolutionary dynamics and the evolution of multiplayer cooperation in a subdivided population. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 429, p. 105–115, 2017. Citado na pág. 12, 13, 19, 31, 52, 53.
- RUBINSTEIN, A.; OSBORNE, M. J. *A Course in Game Theory*. [S.l.]: Mit Press, 1995. Citado na pág. 11, 15, 16, 17.
- SANTOS, F. C.; PACHECO, J. M. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Physical Review Letters*, APS, v. 95, n. 9, p. 098104, 2005. Citado na pág. 27.
- SARKAR, P. A brief history of cellular automata. *ACM computing surveys (csur)*, ACM, v. 32, n. 1, p. 80–107, 2000. Citado na pág. 20.
- SCHIMIT, P. On exploring the genetic algorithm for modeling the evolution of cooperation in a population. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 19, n. 8, p. 2801–2810, 2014. Citado na pág. 30.
- SCHIMIT, P.; MONTEIRO, L. H. A. On the basic reproduction number and the topological properties of the contact network: An epidemiological study in mainly locally connected cellular automata. *Ecological Modelling*, Elsevier, v. 220, n. 7, p. 1034–1042, 2009. Citado na pág. 20.
- SCHIMIT, P.; SANTOS, B.; SOARES, C. Evolution of cooperation in axelrod tournament using cellular automata. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 437, p. 204–217, 2015. Citado na pág. 30.
- SCHIMIT, P. H.; SANTOS, B.; SOARES, C. The evolution of cooperation with different fitness functions using probabilistic cellular automata. *Computational Management Science*, Springer, v. 12, n. 1, p. 35–43, 2015. Citado na pág. 37.
- SCHIMIT, P. H. T. On exploring the genetic algorithm for modeling the evolution of cooperation in a population. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 19, n. 8, p. 2801–2810, 2014. Citado na pág. 13, 52.
- SCHIMIT, P. H. T. Evolutionary aspects of spatial prisoner’s dilemma in a population modeled by continuous probabilistic cellular automata and genetic algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, v. 290, p. 178–188, 2016. Citado na pág. 13, 16, 31, 33, 37, 52, 53.
- SCHIMIT, P. H. T.; MONTEIRO, L. H. A. On the basic reproduction number and the topological properties of the contact network: an epidemiological study in mainly locally connected cellular automata. *Ecol. Model.*, v. 220, p. 1034–1042, 2009. Citado na pág. 21, 33.
- SHAKARIAN, P.; ROOS, P.; JOHNSON, A. A review of evolutionary graph theory with applications to game theory. *BioSystems*, v. 107, p. 66–80, 2012. Citado na pág. 13, 25, 30.
- SIGMUND, K. Introduction to evolutionary game theory. *Evolutionary Game Dynamics*, K. Sigmund, ed, v. 69, p. 1–26, 2011. Citado na pág. 11, 19.

- SMITH, J. M. The theory of games and the evolution of animal conflicts. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 47, n. 1, p. 209–221, 1974. Citado na pág. 12.
- SMITH, J. M. *Evolution and the Theory of Games*. [S.l.]: Cambridge university press, 1982. Citado na pág. 11, 12, 16, 17, 19, 52.
- SMITH, J. M.; PRICE, G. R. The logic of animal conflict. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 246, n. 5427, p. 15, 1973. Citado na pág. 17, 19.
- SMOLLE, J.; STETTNER, H. Computer simulation of tumour cell invasion by a stochastic growth model. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 160, n. 1, p. 63–72, 1993. Citado na pág. 20.
- SOOD, V.; ANTAL, T.; REDNER, S. Voter models on heterogeneous networks. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 4, p. 041121, 2008. Citado na pág. 27.
- SZABÓ, G.; FÁTH, G. Evolutionary games on graphs. *Physics Reports*, Elsevier, v. 446, n. 4-6, p. 97–216, 2007. Citado na pág. 11, 13, 17, 25, 29.
- TARNITA, C. E.; ANTAL, T.; OHTSUKI, H.; NOWAK, M. A. Evolutionary dynamics in set structured populations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 106, n. 21, p. 8601–8604, 2009. Citado na pág. 13, 29.
- TOMASSINI, M.; SIPPER, M.; PERRENOUD, M. On the generation of high-quality random numbers by two-dimensional cellular automata. *IEEE Transactions on computers*, IEEE, v. 49, n. 10, p. 1146–1151, 2000. Citado na pág. 20.
- UGUZ, S.; AKIN, H.; SIAP, I.; SAHIN, U. On the irreversibility of Moore cellular automata over the ternary field and image application. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 40, n. 17-18, p. 8017–8032, 2016. Citado na pág. 20, 21.
- WANG, X.-j.; RUI, D.; LIN, C. The optimal control for promoting the cooperation in evolution game generated by prisoner’s dilemma. *Acta Mathematica Scientia*, Elsevier, v. 38, n. 1, p. 73–92, 2018. Citado na pág. 16.
- WOLFRAM, S. *Cellular automata and complexity: collected papers*. [S.l.]: CRC Press, 1994. Citado na pág. 20, 21.
- WOLFRAM, S. *A new kind of science*. [S.l.]: Wolfram media Champaign, IL, 2002. v. 5. Citado na pág. 20.
- WU, J.; HOU, Y.; JIAO, L.; LI, H. Community structure inhibits cooperation in the spatial prisoner’s dilemma. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 412, p. 169–179, 2014. Citado na pág. 19.